›МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 10, № 1 (1971), 63—67

УДК 512.4

СТРОЕНИЕ РОДОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕПОЛУПРОСТЫХ КОЛЕЦ

Ю. А. Дрозд

Изучение родов целочисленных представлений произвольных колец сводится к случаю порядков в полупростых алгебрах. Строится пример, показывающий, что для порядка в неполупростой алгебре число представлений в роде может неограниченно возрастать с изменением рода. Библ. 7 назв.

Пусть Λ — некоторое кольцо. Λ-решеткой (или целочисленным представлением кольца Λ) называется Λ-модуль, аддитивная группа которого есть решетка, т. е. свободная абелева группа конечного ранга. Говорят, что две Λ-решетки, L и M, принадлежат одному роду, и пишут $L \vee M$, если для любого простого p $L_p \simeq M_p$, где $L_p = L \otimes Z_p$ (Z_p — кольцо целых p-адических чисел). Классы изоморфизма таких Λ-решеток M, что $L \vee M$, образуют род решетки L. Известно (см., например, [1]), что теория целочисленных представлений фактически распадается на две части: теорию p-адических представлений и изучение родов Λ-решеток. Последняя задача уже для простейших с точки зрения теории целочисленных представлений колец — максимальных порядков в полупростых Q-алгебрах (Q-поле рациональных чисел) — приводит к классическим теоретико-числовым вопросам, в частности, к изучению групп классов идеалов полей алгебраических чисел. Поэтому решением этой задачи следует, по-видимому, считать ее сведéние к арифметике числовых полей.

Такое сведéние для представлений максимальных порядков было осуществлено Эйхлером [2]. В работах [3, 4] показано, что изучение родов представлений произвольного порядка Λ в полупростой алгебре сводится к случаю максимального порядка и к вычислению некоторых простых локальных инвариантов. Более того, такая редукция проводится одновременно для всех родов Λ-решеток, откуда следует новое доказательство теоремы А. В. Ройтера [5] о том, что число Λ-решеток в любом роде ограничено некоторой константой, зависящей только от порядка Λ.

В настоящей статье изучение родов представлений произвольного кольца сводится к случаю порядков в полупростых алгебрах. Однако это сведéние оказывается существенно неравномерным, т. е. зависящим от рода. В частности, строится пример, показывающий, что для порядков в неполупростых алгебрах теорема об ограниченности числа модулей в роде неверна.

Для произвольной Λ-решетки L обозначим через $\{L\}$ ее род и через Γ—ее кольцо эндоморфизмов: $\Gamma = \mathrm{Hom}_\Lambda(L, L)$. Γ есть порядок в алгебре $\widetilde{\Gamma} = \Gamma \otimes Q$. Как известно (см. [3, 4, 6]), существует естественное взаимно однозначное соответствие между родом $\{L\}$ и родом $\{\Gamma\}$ (главным родом порядка Γ). Если N—решетка рода $\{\Gamma$, $R = \mathrm{rad}\ \Gamma$ — радикал Джекобсона кольца Γ, то $\overline{N} = N/NR$ есть решетка рода $\{\overline{\Gamma}\}$, где $\overline{\Gamma} = \Gamma/R$ — порядок в полупростой алгебре $\widetilde{\Gamma}/\widetilde{\Gamma} R$.

ТЕОРЕМА 1 *). *Отображение* $N \to \overline{N}$ *устанавливает взаимно однозначное соответствие между родами* $\{\Gamma\}$ и $\{\overline{\Gamma}\}$.

Доказательство. Сюръективность этого отображения следует из того, что $\{\Gamma\}$ можно интерпретировать как множество двойных смежных классов $\widetilde{\Gamma}^* \setminus \widetilde{\Gamma}^*_A/\Gamma^*_A$, где $\widetilde{\Gamma}^*_A$ — группа иделей алгебры $\widetilde{\Gamma}$; $\widetilde{\Gamma}^*$ и Γ^*_A — подгруппы, соответственно, главных и Γ-единичных иделей (см. [4, 6]), а гомоморфизм колец $\Gamma \to \overline{\Gamma}$ индуцирует эпиморфизмы этих групп. Поэтому остается доказать инъективность, т. е. то, что из изоморфизма $\overline{M} \simeq \overline{N}$, где M, N — решетки рода $\{\Gamma\}$, следует изоморфизм $M \simeq N$.

Но если M и N — решетки одного рода, то каждую из них можно вложить в другую. Кроме того, если N — ре-

*) Эта теорема вытекает также из результатов Д. К. Фаддеева [7].

шетка рода $\{\Gamma\}$, то, поскольку $N_p \simeq \Gamma_p$ для всех p, N есть проективный Γ-модуль. Поэтому инъективность отображения $N \to \overline{N}$ непосредственно вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Если M — нетеров модуль над некоторым кольцом, N — его проективный подмодуль, M' и N' — подмодули, соответственно, в M и N, причем $M' \subset \subset \operatorname{rad} M$, где $\operatorname{rad} M$ — пересечение максимальных подмодулей модуля M, и $M/M' \simeq N/N'$, то $M \simeq N$.*

Доказательство. Пусть ψ — эпиморфизм модуля N на M/M'. Поскольку N проективен, ψ можно продолжить до гомоморфизма φ: $N \to M$, причем $\operatorname{Im} \varphi + M' = M$, откуда следует, что $\operatorname{Im} \varphi = M$, т. е. φ — эпиморфизм. Положим $K = \operatorname{Ker} \varphi$. Если $K \neq 0$, то, полагая $K_0 = K$, $K_{i+1} = \varphi^{-1}(K_i)$, мы получим в M строго возрастающую бесконечную цепочку подмодулей: $K_0 \subset \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots$, что невозможно ввиду нетеровости M. Поэтому $K = 0$ и φ — изоморфизм.

Таким образом, изучение произвольного рода сводится к изучению главного рода для некоторого порядка $\overline{\Gamma}$ в полупростой алгебре.

Следствие. *Число классов изоморфизма Λ-решеток в любом роде конечно.*

Действительно, для порядков в полупростых алгебрах это следует из [2—4].

Следующий пример показывает, насколько сильно зависит порядок $\overline{\Gamma}$ от выбора рода, если рассматривать представления порядков в неполупростых алгебрах.

Пусть Λ есть порядок с базисом $[1, r_1, r_2]$ и умножением: $r_i r_j = 0$ для любой пары i, j. Для произвольной Λ-решетки L обозначим

$$L_1 = \{x \in L / x r_1 = x r_2 = 0\}.$$

Выберем в L_1 базис и дополним его до базиса L (это возможно, так как L/L_1 — группа без кручения). Если обозначить T_i матрицу умножения на r_i в таком базисе, то T_i имеет вид

$$T_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_i & 0 \end{pmatrix}.$$

При перевыборе базиса в L_1 и его дополнения до базиса L матрица A_i переходит в матрицу PA_iQ, где P и Q — целочисленные матрицы с определителем ± 1. Наоборот, по любой паре целочисленных матриц A_1, A_2 можно построить целочисленное представление $L = L(A_1, A_2)$, причем $L(A_1, A_2) \simeq L(B_1, B_2)$ тогда и только тогда, когда $B_i = PAQ_i$ $(i = 1, 2)$, где P, Q — целочисленные матрицы с определителем ± 1.

Мы будем рассматривать представления кольца Λ вида $L(E, A)$. Очевидно, что $L(E, A) \simeq L(E, B)$ тогда и только тогда, когда $B = SAS^{-1}$, где S — целочисленная матрица, $\det S = \pm 1$. Таким образом, задача описания представлений кольца Λ по меньшей мере так же сложна, как и описание всех классов эквивалентности целочисленных матриц.

Легко видеть, что если

$$L = L(E, A),\ \Gamma = \mathrm{Hom}_{\Lambda}(L, L),$$

то Γ изоморфно кольцу матриц вида

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & X \end{pmatrix},$$

где $XA = AX$. В частности, $\overline{\Gamma} = \Gamma/\mathrm{rad}\,\Gamma \simeq \Delta/\mathrm{rad}\,\Delta = \overline{\Delta}$, где Δ есть кольцо всех целочисленных матриц, перестановочных с A. Очевидно, что подбирая A, можно сделать порядок $\overline{\Delta}$ сколь угодно «плохим». Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix},$$

то Δ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

где $a = c \pmod m$, а $\overline{\Delta}$ изоморфно подкольцу кольца $\Omega = Z \oplus Z$, состоящему из таких пар (a, c), что $a \equiv c \pmod m$. Индекс $(\Omega\colon \overline{\Delta}) = m$ и если N есть $\overline{\Delta}$-решетка главного рода, то $N\Omega \simeq \Omega$. Поэтому из [4] (предложение 3.5) следует, что

$$\{\overline{\Delta}\} = \Omega^* \diagdown \Omega_m^*/\overline{\Delta}_m^*,$$

где $\Omega_m^* = \prod_{p/m} \Omega_p^*$. Учитывая, что

$$\Omega_m^* = \{(a, c) \mid a, c \in Z_m^*\},$$

$$\Omega^* = \{(a, c) \mid a, c = \pm 1\},$$

$$\bar{\Delta}_m^* = \{(a, c) \mid a, c \in Z_m^*, \quad a \equiv c \pmod{m}\},$$

мы видим, что в роде $\{\bar{\Delta}\}$, а потому и в роде $\{L(E, A)\}$ лежит $\varphi(m)/2$ решеток. Таким образом, для кольца Λ теорема об ограниченности числа модулей в роде неверна.

Киевский государственный университет

Поступило 14.IV.1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Фаддеев Д. К., О полугруппе родов в теории целочисленных представлений, Изв. АН СССР. Сер. матем., **28** (1964), 475—478.

[2] Eichler M., Über die Idealklassenzahl hyperkomplexer Systeme, Math. Z., **43** (1938), 481—494.

[3] Jacobinski H., Genera and decompositions of lattices over orders, Acta Math., **121** (1968), 1—29.

[4] Дрозд Ю. А., Адели и целочисленные представления, Изв. АН СССР. Сер. матем., **33** (1969), 1080—1088.

[5] Ройтер А. В., О целочисленных представлениях, принадлежащих одному роду, Изв. АН СССР. Сер. матем., **30** (1966), 1351—1324.

[6] Фаддеев Д. К., Введение в мультипликативную теорию модулей целочисленных представлений, Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 80 (1965), 145—182.

[7] Фаддеев Д. К., Об эквивалентности систем целочисленных матриц, Изв. АН СССР. Сер. матем., **30** (1966), 445—454.