Національна академія наук України
Інститут математики

Ю.А. ДРОЗД

ВЕКТОРНІ РОЗШАРУВАННЯ НАД ПРОЕКТИВНИМИ КРИВИМИ

Київ — 2010

Національна академія наук України
Інститут математики

Ю.А. ДРОЗД

ВЕКТОРНІ РОЗШАРУВАННЯ НАД ПРОЕКТИВНИМИ КРИВИМИ

Київ — 2010

УДК 512.772.3

Векторні розшарування над проективними кривими / Дрозд Ю.А. // Праці Інституту математики НАН України. Матеатика та її застосування. — 2010. — Т. 81. — 124 с.

Монографія присвячена новим результатам в теорії векторних розшарувань, насамперед, застосуванню техніки матричних задач до дослідження й опису векторних розшарувань над особливими кривими. Розглянуто бімодульні категорії, які є основним апаратом методу матричних задач, зокрема, зображення в'язок ланцігів, які виникають у різноманітних питаннях теорії зображень та алгебричної геометрії. На основі цієї техніки отримано опис векторних розшарувань над лінійними та циклічними проективними конфігураціями, а також стабільних розшарувань над кубікою з вістрям. Для фахівців з теорії зображень, алгебричної геометрії та теорії особливостей.

Рецензенти:
член-корр. НАН України В.В. Шарко,
доктор фіз.-мат. наук А.П. Петравчук

Затверджено до друку вченою радою
Інституту математики НАН України

ISBN 966-02-2571-7
ISBN 978-966-02-5586-9

Ю.А. Дрозд

ВЕКТОРНІ РОЗШАРУВАННЯ НАД ПРОЕКТИВНИМИ КРИВИМИ

ПРАЦІ

Інституту математики

НАН України

Математика та її застосування

Том 81

Засновано в 1994 році

Зміст

Вступ

Цей огляд присвячений деяким останнім результатам у теорії векторних розшарувань, або, що те саме, локально вільних пучків над особливими проективними кривими. Хоч існує чимало статей і книг, присвячених цій тематиці, таких, як [**28, 31**], та багато інших, але більшість з них обмежуються питаннями, пов'язаними з многовидами модулів, а отже, в переважній більшості, предметом досліджень є стабільні та напівстабільні розшарування. Мета моїх нотаток — дати уявлення про те, як можна працювати без цих обмежень. Звичайно, заповітною мрією є опис *всіх* векторних розшарувань. Як завжди, вона залишається лише мрією: це можна зробити тільки у декількох спеціальних випадках. Проте, навіть ці випадки є істотними; крім того, розроблену техніку можна застосовувати і до дослідження інших задач, включаючи вивчення стабільних розшарувань. Я спробую переконати в цьому читача.

Мої нотатки організовано в такий спосіб. Спочатку я нагадую деякі основні означення, зокрема, зв'язок векторних розшарувань з локально вільними пучками (розділ 1); я також виводжу з цих означень відомий опис [**25**] векторних розшарувань над проективною прямою. Для повноти, я включив розділ 2, в якому відтворено опис векторних розшарувань над еліптичними кривими, який належить Атьї [**10**]. Певним вибаченням є те, що ці результати подано в дещо підсиленій формі й на мові теорії категорій (див., наприклад, наслідки 2.11 та 2.12).

У розділах 3 та 4 викладено основні технічні засоби, які застосовуються при вивченні векторних розшарувань саме над *особливими* кривими: *сендвіч-процедура* та *бімодульні категорії*. Вони вперше виникли в теорії Коен–Маколеївських модулів (див., наприклад, огляд [**19**]), але швидко довели свою ефективність і в багатьох інших питаннях, особливо, коли ми бажаємо «спуститися» від чогось неособливого до підпорядкованого особливого кільця, многовиду, тощо. В розділі 5 розглянуто спеціальний клас бімодульних задач — «в'язки ланцюгів». Цей розділ є найбільш технічним, і мабуть, багато читачів не стануть копирсатися в деталях доведень. Втім, я рекомендую їм принаймні розібратися в результатах, оскільки в'язки ланцюгів виникають у найрізноманітніших розділах сучасної математики, інколи зовсім несподівано.

У розділах 6 та 7 ми використовуємо розвинену техніку до двох типів особливих проективних кривих, для яких вона дає повну класифікацію векторних розшарувань, а саме, до *проективних конфігурацій* типів A та $\widetilde{\mathrm{A}}$. Серед останніх знаходиться, наприклад, завузлена кубічна крива. Явні результати цих розділів ґрунтуються на результатах про в'язки ланцюгів. І хоч у випадку конфігурацій типу A їх можна одержати більш елементарними методами, проте це вже стає неможливим у випадку $\widetilde{\mathrm{A}}$, який є найбільш важливим у застосуваннях.

Описи векторних розшарувань над проективною прямою та над проективними конфігураціями типу A мають, як кажуть у теорії зображень, *скінченний тип*: якщо фіксувати певні дискретні параметри (ранги та степені), то існує лише скінченна кількість нерозкладних векторних розшарувань (насправді, всі вони є лінійними розшаруваннями). У випадках еліптичних кривих та проективних конфігурацій типу $\widetilde{\mathrm{A}}$ положення набагато складніше. Нерозкладні розшарування можуть мати довільні ранги; більше того, виникають *сім'ї* нерозкладних векторних розшарувань, які мають фіксовані дискретні параметри. Втім, ці випадки є *ручними* (знов-таки, на мові теорії зображень). Це означає, що можливі лише однопараметричні сім'ї. Ми не будемо уточнювати термін «ручний»; читач, який хоче ознайомитись з формальними означеннями, знайде їх, наприклад, у статтях [**22, 20**].

Виявляється, що всі інші проективні криві (особливі й неособливі) є *дикими* відносно векторних розшарувань. Це означає, що опис векторних розшарувань над ними містить у собі опис зображень довільної скінченно породженої алгебри. У розділі 8 ми даємо формальне означення дикості та наводимо начерк доведення. Загалом, встановлюємо те, що зветься *типом проективної кривої відносно класифікації векторних розшарувань*, або *ВР-типом* (формальні означення цих термінів читач знайде, наприклад, в [**22**]):

- проективна пряма та проективні конфігурації типу A є *ВР-скінченними*;
- еліптичні криві та проективні конфігурації типу $\widetilde{\mathrm{A}}$ є *ВР-ручними*;
- всі інші проективні криві є *ВР-дикими*

Нарешті, у розділі 9 ми показуємо, що розвинена техніка є корисною навіть у дикому випадку. Саме, ми застосовуємо її, щоб явно описати стабільні векторні розшарування над кубічною кривою з вістрям, яка є, мабуть, найпростішою з ВР-диких кривих. Такий явний опис є важливим, наприклад, завдяки зв'язкам векторних розшарувань з рівняннями Янга–Бакстера. Зацікавлений читач знайде таке застосування в роботі [**18**].

Ми дотримуємося досить елементарного способу викладення. Зокрема, ми не застосовуємо методи, пов'язані з похідними категоріями, хоч вони інколи можуть прояснити ситуацію (див., наприклад, [**17**]). Втім, зауважимо, що аналогічна сендвіч-процедура та бімодульні задачі (особливо в'язки ланцюгів!) виявилися дуже корисними і при дослідженні похідних категорій (див., наприклад, [**15, 16**]). Ми також не розглядаємо застосування векторних розшарувань до рівнянь Янга–Бакстера чи до Коен–Маколеївських модулів над поверхневими особливостями. Останні можна знайти в роботах [**26, 23, 20**]. Звичайно, ми передбачаємо, що читач володіє елементами алгебричної геометрії. Стандартні посилання на відповідний матеріал — книги [**9**] та [**4**].

Ці записи виникли в перебігу моїх лекцій на алгебричній школі, організованій Національним інститутом чистої і прикладної математики Бразилії (IMPA) в Ріо де Жанейро в 2008 році. Я щиро вдячний організаційному комітету школи за чудову можливість представити на ній ці результати. Я також вдячний Інституту математики і статистики Університету Сан Пауло за ласкаве запрошення та надані мені чудові можливості для роботи, які й забезпечили належну (як я сподіваюся) підготовку до друку першої версії цих лекцій, опублікованої в [**21**].

Розділ 1

Загальні положення

Спочатку я нагадаю основні означення, які стосуються векторних розшарувань (див. [**9, 28**]). Нехай X — алгебричний многовид над полем $\Bbbk$, яке ми завжди вважатимемо алгебрично замкненим. *Векторне розшарування* над X — це морфізм алгебричних многовидів $\xi : B \to X$, який «*локально виглядає, як добуток з векторним простором*». Це означає, що існує відкрите покриття $X = \bigcup_{i=1}^m U_i$ та ізоморфізми $\phi_i : \xi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{A}^r$ для деякого r такі, що для кожної пари i, j існує морфізм $\phi_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(r, \Bbbk)$ такий, що $\phi_i\phi_j^{-1}(x, v) = (x, \phi_{ij}(x)v)$ для довільних $x \in U_i \cap U_j,\ v \in \mathbb{A}^n$. Набір (U_i, ϕ_i, ϕ_{ij}) називають *тривіалізацією* векторного розшарування B (або, більш точно, $\xi : B \to X$). Число r звуть *рангом* векторного розшарування і позначають $\mathrm{rk}(B)$. Якщо $r = 1$, то кажуть, що B є *лінійним розшаруванням.* Зауважимо, що, якщо $\{ V_k \}$ — *подрібнення покриття* $\{ U_i \}$, тобто кожна множина V_k міститься в якійсь із множин U_i, а кожна множина U_i є об'єднанням деяких із множин V_k, то можна одержати *подрібнення тривіалізації* (U_i, ϕ_i, ϕ_{ij}) у такий спосіб:

- Для кожного k фіксуємо якесь i, для якого $V_k \subseteq U_i$, і приймаємо за ψ_k обмеження ϕ_i на V_k.
- Для кожної пари k, l, для якої вже обрано $U_i \supseteq V_k$ та $U_j \supseteq V_l$, приймаємо за ψ_{kl} обмеження ϕ_{ij} на $V_k \cap V_l$.

Нехай $\xi : B \to X$ та $\xi' : B' \to X$ — два векторних розшарування рангів r та r' відповідно з тривіалізаціями (U_i, ϕ_i, ϕ_{ij}) та $(U'_i, \phi'_i, \phi'_{ij})$ відповідно. *Морфізм* векторних розшарувань $f : B \to B'$ — це такий морфізм алгебричних многовидів, що для кожної пари (i, j) існує такий морфзім $f_{ij} : U_i \cap U'_j \to \mathrm{Mat}(r' \times r, \Bbbk)$, що $\phi'_i f \phi_j^{-1}(x, v) = (x, f_{ij}(x)v)$ для всіх $x \in U_i \cap U'_j$, $v \in \mathbb{A}^r$. З конструкції подрібнення, розглянутої вище, випливає, що ми завжди можемо припускати, що тривіалізації цих розшарувань задані на одному й тому ж покритті простору X, а саме, на покритті $\left\{ U_i \cap U'_{j'} \right\}$.

Насправді, векторне розшарування рангу r буде визначене, якщо ми виберемо якесь відкрите покриття $X = \bigcup_i U_i$ і морфізми $\phi_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(r, \Bbbk)$ такі, що $\phi_{ii} = \mathrm{id}$, а $\phi_{ij}\phi_{jk} = \phi_{ik}$ на $U_i \cap U_j \cap U_k$ для кожної трійки i, j, k. Ізоморфне векторне розшарування (з тривіалізацією на тому самому покритті) тоді визначається набором морфізмів ϕ'_{ij} таких, що $\phi'_{ij}(x) = f_i(x)\phi_{ij}(x)f_j^{-1}(x)$ для деяких морфізмів $f_i : U_i \to \mathrm{GL}(r, \Bbbk)$ і кожної точки $x \in U_i \cap U_j$. Отже, класи ізоморфізму векторних розшарувань рангу r знаходяться у взаємно однозначній відповідності з множиною когомологій $\mathrm{H}^1(X, \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_X))$ (див. [**24**] або [**3**] щодо означення некомутативних когомологій та їх застосування). Зокрема, класи ізоморфізму лінійних розшарувань знаходяться у взаємно однозначній відповідності з елементами групи когомологій $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$.

Категорію векторних розшарувань $\mathrm{VB}(X)$ зручно ототожнити з певною підкатегорією категорії $\mathrm{Coh}\, X$ когерентних пучків $\mathcal{O}_X$-модулів. А саме, добре відомо, що для кожного векторного розшарування $\xi : B \to X$ можна побудувати когерентний пучок $\mathcal{B}$, якщо визначити $\mathcal{B}(U)$ як множину його *перерізів над* U, тобто таких відображень $\sigma : U \to B$, що $\xi\sigma = \mathrm{id}$. Цей пучок завжди є *локально вільним*, тобто всі його стебла $\mathcal{B}_x$ є вільними $\mathcal{O}_{X,x}$-модулями рангу $r = \mathrm{rk}\, B$. Навпаки, нехай $\mathcal{B}$ — локально вільний пучок постійного рангу r. Існує відкрите афінне покриття $X = \bigcup_{i=1}^m U_i$ таке, що $\mathcal{B}|U_i \simeq r\mathcal{O}_{U_i}$ для всіх індексів $i = 1, 2, \dots, m$. Фіксуємо певні ізоморфізми $\beta_i : r\mathcal{O}_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}|U_i$ і покладемо $\beta_{ij} = \beta_i^{-1}\beta_j|(U_i \cap U_j)$. Позначимо $A_i = \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$; це — координатне кільце афінного многовиду U_i. Так само, $A_{ij} = \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)$ — координатне кільце афінного многовиду $U_i \cap U_j$. Тому морфізм β_{ij} задається матрицею з $\mathrm{GL}(r, A_{ij})$, отже, його можна ототожнити з морфізмом $U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(r, \Bbbk)$. Очевидно, $\beta_{ii} = \mathrm{id}$, а $\beta_{ij}\beta_{jk} = \beta_{ik}$ на $U_i \cap U_j \cap U_k$, тобто ці морфізми визначають векторне розшарування над X. Так само очевидно, що ці дві операції є взаємно оберненими. Отже, вони визначають еквівалентність між $\mathrm{VB}(X)$ та категорією локально вільних пучків. Далі будемо ототожнювати ці дві категорії. Зокрема, ми ототожнюємо векторне розшарування з пучком його локальних перерізів і вживаємо слова «векторне розшарування» та «локально вільний пучок» як синоніми. При цьому ототожненні лінійні розшарування переходять в *оборотні пучки*, тобто такі пучки $\mathcal{L}$, що $\mathcal{L} \otimes_X \mathcal{L}^\vee \simeq \mathcal{O}_X$, де $\mathcal{L}^\vee = \mathscr{H}\!om_X(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$. Оборотні пучки утворюють групу відносно операції тензорного добутку; ця група зветься *групою Пікара* многовиду X і позначається $\operatorname{Pic} X$. Як ми бачили вище, $\operatorname{Pic} X \simeq \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$.

Нагадаємо [**9**], що якщо многовид X — афінний, то когерентні пучки на X знаходяться у відповідності зі скінченнопородженими модулями над координатним кільцем $A = \Bbbk[X]$: пучок $\mathcal{F}$ повністю визначається модулем перерізів $\Gamma(X, \mathcal{F})$. Зокрема, локально вільні пучки відповідають *проективним* A-модулям. Якщо $X =$

$= \mathbb{A}^n$, його координатним кільцем є кільце многочленів $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Як довели Квіллен та Суслін, кожен проективний модуль над цим кільцем є *вільним* (див., наприклад, [**27**]). Отже, відповідний когерентний пучок ізоморфний $r\mathcal{O}_X$, а відповідне векторне розшарування є *тривіальним*, тобто ізоморфним $X \times \mathbb{A}^r$. Якщо $n = 1$, це очевидно випливає з того, що $\Bbbk[x]$ є кільцем головних ідеалів.

Розглянемо найпростіший неафінний випадок: $X = \mathbb{P}^1$. Нехай $(x_0 : x_1)$ — однорідні координати на $\mathbb{P}^1$, а $U_i = \{\, (x_0 : x_1) \mid x_i \neq 0 \,\}$ $(i = 0, 1)$. Це афінні відкриті підмножини: U_i ізоморфна $\mathbb{A}^1$, а її координатним кільцем є $A_i = \Bbbk[x_j/x_i]$ $(j \neq i)$. Якщо $\mathcal{F}$ — локально вільний пучок на $\mathbb{P}^1$, його обмеження на кожне U_i є вільним: існують ізоморфізми $\beta_i : \mathcal{F}|U_i \simeq r\mathcal{O}_{U_i}$ $(i = 0, 1)$. Отже, ми мусимо лише визначити склеювання $\beta = \beta_1\beta_0^{-1} : r\mathcal{O}_{U_0}|U \simeq r\mathcal{O}_{U_1}|U$, де $U = U_0 \cap U_1$. Очевидно, $U \simeq \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, отже, це афінний многовид з координатним кільцем $A = \Bbbk[t, t^{-1}]$, де ми поклали $t = x_1/x_0$, тобто $A_0 = \Bbbk[t]$, $A_1 = \Bbbk[t^{-1}]$. Тому β можна розглядати як матрицю з групи $\mathrm{GL}(r, A)$. Якщо інший локально вільний пучок $\mathcal{F}'$ визначається матрицею $\beta' \in \mathrm{GL}(r', A)$, то морфізм $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ задається парою матриць (f_0, f_1), $f_i \in \mathrm{Mat}(r' \times r, A_i)$, які визначають обмеження

f на U_i. Ці матриці повинні задовольняти рівняння сумісності $f_1\beta = \beta' f_0$. Зокрема, $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}'$ тоді й тільки тоді, коли $r = r'$ та існують матриці $f_i \in \mathrm{GL}(r, A_i)$, для яких $\beta' = f_1 \beta f_0^{-1}$. Тому повний опис векторних розшарувань над $\mathbb{P}^1$ є простим наслідком наступного результату, який залишаємо читачеві як вправу (дещо подібну відомій теоремі Сміта про діагоналізацію матриці над кільцем цілих чисел чи кільцем многочленів від однієї змінної).

Вправа 1.1. Доведіть, що для кожної матриці β з групи $\mathrm{GL}(r, \Bbbk[t, t^{-1}])$ існують такі матриці $f_0 \in \mathrm{GL}(r, \Bbbk[t])$ та $f_1 \in \mathrm{GL}(r, \Bbbk[t^{-1}])$, що $f_1 \beta f_0^{-1} = \mathrm{diag}(t^{d_1}, t^{d_2}, \ldots, t^{d_r})$ для деяких $d_i \in \mathbb{Z}$.

Легко бачити, що 1×1 матриця t^{-d} визначає лінійне розшарування $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ (d-кратно підкручене тривіальне розшарування).

Наслідок 1.2 (Біркгоф, Ґротендік [**25**]). *Кожен локально вільний пучок над $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ розкладається в пряму суму лінійних розшарувань $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$.*

Нагадаємо, що для проективного многовиду X всі простори гомоморфізмів $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$, які ототожнюються з $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{H}om_X(\mathcal{F}, \mathcal{F}'))$, де $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ — когерентні пучки, а $\mathscr{H}om_X$ позначає пучок локальних гомоморфізмів, є скінченновимірними [**9**, Розділ III, §5]. Зокрема, якщо пучок $\mathcal{F}$ нерозкладний, тобто кільце ендоморфізмів $\mathrm{End}(\mathcal{F})$

не містить ідемпотентів (крім 0 та 1), це кільце є *локальним* [**5**]. Тоді стандартні аргументи, як у [**5, 8**], показують, що розклад когерентного (зокрема, локально вільного) пучка у пряму суму нерозкладних є однозначним (з точністю до ізоморфізму та нумерації доданків).

Можна також легко обчислити морфізми між локально вільними пучками над $\mathbb{P}^1$

Твердження 1.3.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d')) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } d > d', \\ \Bbbk[t]_{d'-d}, & \text{якщо } d \leqslant d', \end{cases}$$

де $\Bbbk[t]_m$ *позначає простір многочленів степеня, який не перевищує* m.

Зокрема, якщо згадати, що $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) \simeq \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d))$, *отримуємо:*

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } d < 0, \\ \Bbbk[t]_d, & \text{якщо } d \geqslant 0. \end{cases}$$

Доведення. Морфізм $f : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d')$ задається парою многочленів $f_0(t)$, $f_1(t^{-1})$ таких, що $f_1 t^{-d} = = t^{-d'} f_0$, або $f_1(t^{-1}) = x^{d-d'} f_0(t)$. Очевидно, це неможливо при $d > d'$, а при $d \leqslant d'$ в якості $f_0(t)$ можна взяти довільний многочлен степеня, який не перевищує $d' - d$, після чого $f_1(t^{-1})$ однозначно визначається за f_0. $\square$

Вправа 1.4. Доведіть, що

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(d)) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } d \geqslant -1, \\ \Bbbk[t]_{-1-d}, & \text{якщо } d < -1, \end{cases}$$

а

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d')) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } d < d', \\ \Bbbk[t]_{d-d'-1}, & \text{якщо } d > d', \end{cases}$$

Це можна або зробити «напряму», обчисливши H^1 за допомогою розглянутого афінного покриття, або скористатися теоремою Рімана–Роха, [**9**, Теорема IV.1.3]. Треба також згадати, що

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)),$$

а також

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}(d), \mathcal{G}(d')) \simeq \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}(d'-d)).$$

Розділ 2

Еліптичні криві

Крім $\mathbb{P}^1$, є ще тільки один приклад неособливих проективних кривих, для яких одержано повний опис векторних розшарувань: це *еліптичні криві*, тобто неособливі криві роду 1 [**10, 30**]. Для повноти викладу нагадаємо ці результати.

Нехай X — еліптична крива. Її завжди можна подати як двократне накриття $\mathbb{P}^1$ з 4 різними точками розгалуження степеня 2, якими можуть бути обрані $\{0, 1, \infty, \lambda\}$ (тоді λ визначене з точністю до дії симетричної групи $\mathbf{S}_3$, породженої відображеннями $\lambda \mapsto 1 - \lambda$ та $\lambda \mapsto 1/\lambda$). Якщо $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$, то така крива ізоморфна плоскій кубічній кривій, афінна частина якої має рівняння $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ [**9**, Розділ IV.4].

Нагадаємо [**9**, Розділ IV.4], що множина $\operatorname{Pic}_d X$ лінійних розшарувань фіксованого степеня d над еліптичною кривою X знаходиться у взаємно однозначній відповідності з точками цієї кривої: якщо o — якась фіксована точка, то кожне лінійне розшарування степеня d ізоморфне $\mathcal{O}_X(x+(d-1)o)$, де x — однозначно визначена точка кривої X. Більше того, існує лінійне розшарування $\mathcal{P}$ над $X \times X$ (*розшарування Пуанкаре*) таке, що для кожної точки $x \in X$

$$\mathcal{O}_X(x+(d-1)o) \simeq \mathcal{O}_X(do) \otimes_{\mathcal{O}_X} i_x^* \mathcal{P} \simeq i_x^* \mathcal{P}(d(o \times X)),$$

де i_x — занурення $X \simeq X \times x \to X \times X$. Отже, лінійні розшарування степеня d утворюють однопараметричну сім'ю, параметризовану кривою X. Виявляється, що опис нерозкладних векторних розшарувань довільного рангу та степеня має такий самий вигляд.

Нехай X — незвідна проективна крива. Для довільного когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X позначимо

$$\begin{aligned} \mathrm{h}^k(\mathcal{F}) &= \dim \mathrm{H}^k(X, \mathcal{F}), \\ \chi(\mathcal{F}) &= \mathrm{h}^0(\mathcal{F}) - \mathrm{h}^1(\mathcal{F}) \\ &\quad (\textit{характеристика Ойлера пучка } \mathcal{F}), \\ p_a(X) &= p_a = \mathrm{h}^1(\mathcal{O}_X) \\ &\quad (\textit{арифметичний рід } \text{кривої } X). \end{aligned}$$

Останній співпадає з геометричним родом $g(X)$, якщо крива неособлива. Визначимо *ранг* пучка $\mathcal{F}$, як $\mathrm{rk}\, \mathcal{F} = \dim_{\mathcal{K}}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K})$, де $\mathcal{K} = \Bbbk(X)$ — поле раціональних функцій на кривій X, і *степінь* пучка $\mathcal{F}$, як

$$\deg \mathcal{F} = \chi(\mathcal{F}) - \chi(\mathcal{O}_X)\, \mathrm{rk}\, \mathcal{F} = \chi(\mathcal{F}) - \chi(\mathcal{O}_X)\, \mathrm{rk}\, \mathcal{F}.$$

Теорема Рімана–Роха [**9**, Розділ IV.1] показує, що для лінійних розшарувань це означення збігається зі звичайним. Нарешті, визначимо *нахил* (*slope*) пучка $\mathcal{F}$, як відношення $\mu(\mathcal{F}) = \deg \mathcal{F} / \operatorname{rk} \mathcal{F}$. Зауважимо, що ненульовий пучок $\mathcal{F}$ рангу 0 є «*хмарочосом*» (skyscraper), тобто є нульовим поза скінченною множиною точок. Тоді $\deg \mathcal{F} = \mathrm{h}^0(\mathcal{F}) > 0$, а $\mu(\mathcal{F}) = \infty$. Когерентний пучок $\mathcal{F}$ зветься *напівстабільним* (*стабільним)*, якщо $\mu(\mathcal{F}') \leqslant \mu(\mathcal{F})$ (відповідно, $\mu(\mathcal{F}') < \mu(\mathcal{F})$) для кожного власного підпучка $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. Зокрема, всі хмарочоси є напівстабільними, але стабільними серед них є лише прості, тобто пучки $\Bbbk(x)$, $x \in X$.

Встановимо деякі властивості цих параметрів. Далі, якщо не виникатиме двозначності, будемо писати $\otimes$ замість $\otimes_{\mathcal{O}_X}$.

Твердження 2.1. *Якщо $\mathcal{F}$ та $\mathcal{G}$ — когерентні пучки на незвідній проективній кривій X і один з них є локально вільним, то* $\deg(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) = \operatorname{rk} \mathcal{F} \deg \mathcal{G} + \deg \mathcal{F} \operatorname{rk} \mathcal{G}$*, а тому* $\mu(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) = \mu(\mathcal{F}) + \mu(\mathcal{G})$.

Доведення. Позначимо $\operatorname{rk} \mathcal{F} = r$, $\deg \mathcal{F} = d$, $\operatorname{rk} \mathcal{G} = r'$, $\deg \mathcal{G} = d'$ і припустимо, що $\mathcal{G}$ є локально вільним. Тоді $\mathcal{F} \otimes \mathcal{K} \simeq (r\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{K} \simeq r\mathcal{K}$. Розглянемо в $r\mathcal{K}$ підпучок $\widetilde{\mathcal{F}}$, породжений образами обох пучків $\mathcal{F}$ і $r\mathcal{O}_X$. Існують точні послідовності

$$0 \to \mathcal{S}_1 \to \mathcal{F} \to \widetilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{S}_2 \to 0$$

та

$$0 \to r\mathcal{O}_X \to \widetilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{S}_3 \to 0,$$

в яких $\mathcal{S}_i$ є хмарочосами. Оскільки степінь адитивний у точних послідовностях, а $\deg \mathcal{O}_X = 0$, то $d = \deg \mathcal{S}_1 - \deg \mathcal{S}_2 + \deg \mathcal{S}_3$. Помножимо тензорно ці послідовності на $\mathcal{G}$ і згадаємо, що тензорний добуток з локально вільним пучком є точним функтором. Одержимо точні послідовності

$$0 \to \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \to \widetilde{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{S}_2 \otimes \mathcal{G} \to 0$$

та

$$0 \to r\mathcal{G} \to \widetilde{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{S}_3 \otimes \mathcal{G} \to 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) = rd' + \deg(\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{G}) - \\ - \deg(\mathcal{S}_2 \otimes \mathcal{G}) + \deg(\mathcal{S}_3 \otimes \mathcal{G}). \end{aligned}$$

Для кожного хмарочоса $\mathcal{S}$

$$\deg \mathcal{S} = \mathrm{h}^0(\mathcal{S}) = \sum_x \dim \mathcal{S}_x$$

і $\mathrm{h}^0(\mathcal{S} \otimes \mathcal{G}) = r'\mathrm{h}^0(\mathcal{S})$, оскільки пучок $\mathcal{G}$ локально вільний. Отже,

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) &= rd' + r'(\deg \mathcal{S}_1 - \deg \mathcal{S}_2 + \deg \mathcal{S}_3) = \\ &= rd' + r'd. \end{aligned}$$

□

Наслідок 2.2. *Якщо* $\mathcal{F}^\vee = \mathscr{H}om_X(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ — *пучок, дуальний до локально вільного пучка* $\mathcal{F}$, *то* $\deg \mathcal{F}^\vee = -\deg \mathcal{F}$ *і* $\mu(\mathcal{F}^\vee) = -\mu(\mathcal{F})$.

Доведення. Очевидно, $\mathrm{rk}(\mathcal{F}^\vee) = \mathrm{rk}(\mathcal{F})$. Нагадаємо, що з двоїстості Серра [**9**, Розділ III.7] випливає, що

$$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F}^\vee) \simeq \mathrm{H}^{1-i}(X, \mathcal{F} \otimes \omega_X)^*,$$

де ω_X — дуалізуючий пучок для многовиду X, а V^* позначає дуальний векторний простір до V. Отже, якщо $\mathrm{rk}\,\mathcal{F} = r$, то

$$\begin{aligned}\deg \mathcal{F} &= \chi(\mathcal{F}) + r(p_a - 1) = \\ &= -\chi(\mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X) + r(p_a - 1) = \\ &= -\deg(\mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X) + 2r(p_a - 1) = \\ &= -r \deg \omega_X - \deg \mathcal{F}^\vee + 2r(p_a - 1) = \\ &= -\deg \mathcal{F}^\vee,\end{aligned}$$

оскільки $\mathrm{rk}\,\omega_X = 1$, а $\deg \omega_X = \chi(\omega_X) + p_a - 1 = -\chi(\mathcal{O}_X) + p_a - 1 = 2(p_a - 1)$. $\square$

З означення нахилу одразу випливає такий результат.

Твердження 2.3. *Нехай* $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ — *точна послідовність когерентних пучків. У цьому випадку* $\mu(\mathcal{F}') < \mu(\mathcal{F})$ *тоді й тільки тоді, коли* $\mu(\mathcal{F}'') > \mu(\mathcal{F})$, *а* $\mu(\mathcal{F}') > \mu(\mathcal{F})$ *тоді й тільки тоді, коли* $\mu(\mathcal{F}'') < \mu(\mathcal{F})$.

Наслідок 2.4. *Будь-який стабільний пучок* $\mathcal{F}$ *є* цеглиною[1] (*brick*), *тобто* $\operatorname{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{F}) = \Bbbk$.

Доведення. Припустимо, що існує морфізм $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, який не є ані нульовим, ані оборотним. Тоді $\operatorname{Im} f \neq \mathcal{F}$, отже, $\mu(\operatorname{Im} f) < \mu(\mathcal{F})$, а тому $\mu(\operatorname{Ker} f) > \mu(\mathcal{F})$, що неможливо. Тому $\operatorname{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{F})$ є полем, отже, співпадає з $\Bbbk$ (оскільки останнє ми вважаємо алгебрично замкненим). □

Нехай тепер $p_a(X) = 1$, тобто $\deg \mathcal{F} = \chi(\mathcal{F})$ для кожного когерентного пучка $\mathcal{F}$. Якщо пучок $\mathcal{F}$ є локально вільним, то $\mathscr{H}om_X(\mathcal{F},\mathcal{G}) \simeq \simeq \mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{G}$ для довільного пучка $\mathcal{G}$. Більш того, в цьому випадку дуалізуючий пучок ω_X є ізоморфним до $\mathcal{O}_X$, тому з двоїстості Серра [**9**, Розділ III.7] випливає, що $\mathrm{H}^0(X,\mathcal{F}^\vee) = \operatorname{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{O}_X) \simeq \simeq \mathrm{H}^1(X,\mathcal{F})^*$ і $\mathrm{H}^1(X,\mathcal{F}^\vee) \simeq \mathrm{H}^0(X,\mathcal{F})$, а також

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{F},\mathcal{G}) &\simeq \mathrm{H}^1(X,\mathscr{H}om_X(\mathcal{F},\mathcal{G})) \simeq \\ &\simeq \mathrm{H}^1(X,\mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{G}) \simeq \\ &\simeq \operatorname{Hom}_X(\mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{G},\mathcal{O}_X)^* \simeq \\ &\simeq \operatorname{Hom}_X(\mathcal{G},\mathcal{F})^*. \end{aligned} \tag{2.1}$$

[1] У літературі з теорії векторних розшарувань більш вживаний термін «*просте розшарування*», але ми віддали перевагу терміну «цеглина», щоб не плутати з простими об'єктами в категорії пучків, тобто такими, які не мають нетривіальних підпучків.

Твердження 2.5. *Нехай* $p_a(X) = 1$, $\mathcal{F}$ *і* $\mathcal{G}$ — *когерентні пучки над кривою* X, *причому* $\mathcal{F}$ *є локально вільним.*

(1) *Якщо* $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{G})$, *то* $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \neq 0$.
(2) *Якщо* $\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{G})$, *то*
$$\dim \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \dim \mathrm{Hom}_X(\mathcal{G}, \mathcal{F}).$$
(3) *Якщо векторне розшарування* $\mathcal{F}$ *є цеглиною, то воно стабільне.*
(4) *Якщо* $\mu(\mathcal{F}) > \mu(\mathcal{G})$ *і обидва пучки* $\mathcal{F}$ *і* $\mathcal{G}$ *є напівстабільними векторними розшаруваннями, то*
$$\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = 0.$$
(5) *Якщо крива* X *є неособливою, а пучок* $\mathcal{F}$ *є нерозкладним, то* $\mathcal{F}$ *є напівстабільним.*

Доведення. (1–2). Оскільки $\mathscr{H}om_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{G}$, то $\deg(\mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{G}) = \dim \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) - \dim \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. За умови $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{G})$, тобто $\mu(\mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{G}) > 0$ і $\deg(\mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{G}) > 0$, звідси отримуємо (1). Якщо $\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{G})$, ті самі міркування показують, що $\dim \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \dim \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, і твердження (2) випливає з формули (2.1).

(3). Нехай $\mathcal{F}$ є цеглиною, а $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ — власний підпучок. Тоді $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}', \mathcal{F}) \neq 0$. Якщо $\mu(\mathcal{F}') \geqslant \mu(\mathcal{F})$, то, внаслідок (1–2), має місце й нерівність $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \neq 0$. Це неможливо, оскільки морфізм $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ можна розглядати як необоротний морфізм $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$.

(4). Згідно з формулою (2.1), $\mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{G},\mathcal{F}) \simeq \simeq \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{G})^*$. Якщо $f:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ — ненульовий морфізм, а $\mathcal{H}=\mathrm{Im}\, f$, то, оскільки $\mathcal{F}$ і $\mathcal{G}$ є напівстабільними, $\mu(\mathcal{F})\leqslant\mu(\mathcal{H})\leqslant\mu(\mathcal{G})$, що неможливо. Тому $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{G})=0$.

(5). Зазначимо, що, оскільки X є неособливою, кожен когерентний пучок без скруту є локально вільним. Зазначимо також, що якщо $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}$ — власний підпучок того ж рангу, то факторпучок $\mathcal{S}=\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ є хмарочосом. Тому $\deg\mathcal{S}>0$ і $\deg\mathcal{F}'<\deg\mathcal{F}$, а отже й $\mu(\mathcal{F}')<\mu(\mathcal{F})$. Нехай $m=\max\{\,\mu(\mathcal{F}')\mid\mathcal{F}'\subseteq\mathcal{F}\,\}$, а $\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}$ — підпучок найбільшого можливого рангу, для якого $\mu(\mathcal{F}_1)=m$. Тоді $\mathcal{F}_1$ є напівстабільним, а $\mathcal{F}/\mathcal{F}_1$ також є пучком без скруту. Дійсно, якби в $\mathcal{F}/\mathcal{F}_1$ був підпучок $\mathcal{M}\neq0$, який є хмарочосом, то його прообраз $\mathcal{F}'$ у $\mathcal{F}$ мав би більший степінь, ніж $\mathcal{F}_1$, але той самий ранг, що неможливо. Крім того, $\mathcal{F}/\mathcal{F}_1$ не містить підпучків з нахилом m, оскільки прообраз такого підпучка в $\mathcal{F}$ також був би підпучком з нахилом m, але більшого рангу, ніж $\mathcal{F}_1$. Якщо $\mathcal{F}_1\neq\mathcal{F}$, то, повторюючи цю процедуру, ми побудуємо башту підпучків $0\subset\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\dots\subset\mathcal{F}_k=\mathcal{F}$ з напівстабільними факторами $\mathcal{G}_i=\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$, причому $\mu(\mathcal{G}_i)<m$ при $i>1$. Згідно з (4), тоді $\mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{G}_i,\mathcal{F}_1)=0$ при $i>1$, звідки й $\mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{F}/\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_1)=0$, а тому

$\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}/\mathcal{F}_1$. Оскільки пучок $\mathcal{F}$ є нерозкладним, то $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$, тобто $\mathcal{F}$ є напівстабільним. □

Зауваження. Ми побачимо, що твердження (5) вже не є вірним для *особливих* кривих арифметичного роду 1.

Далі будемо вважати, що X — еліптична крива. Тоді, щоб знайти всі нерозкладні векторні розшарування, можна обмежитись розглядом напівстабільних векторних розшарувань з фіксованим нахилом μ. Позначимо через VB_μ категорію всіх таких векторних розшарувань. Очевидно, тензорне множення з лінійним розшаруванням $\mathcal{L}$ степеня l індукує еквівалентність $\mathrm{VB}_\mu \simeq \mathrm{VB}_{\mu+l}$, а тому можна обмежитись випадком, коли $0 \leqslant \mu < 1$. Нехай спочатку $\mu = 0$.

Теорема 2.6. *Для кожного додатного цілого r існує єдине з точністю до ізоморфізму нерозкладне векторне розшарування $\mathcal{N}_r$ рангу r і степеня 0 таке, що $\mathrm{h}^0(\mathcal{N}_r) \neq 0$. Для цього розшарування $\mathrm{h}^0(\mathcal{N}_r) = \mathrm{h}^1(\mathcal{N}_r) = 1$ й існує фільтрація, всі фактори якої ізоморфні $\mathcal{O}_X$. Крім того, $\mathcal{N}_r^\vee \simeq \mathcal{N}_r$.*

Доведення. Зауважимо, що останнє твердження випливає з попередніх, оскільки $\mathrm{h}^0(\mathcal{N}_r^\vee) = \mathrm{h}^1(\mathcal{N}_r) \neq 0$. Скористаємося індукцією за r. Якщо існує ненульовий морфізм $f : \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$, то $\operatorname{Im} f \simeq \mathcal{O}_X$. Якщо $\operatorname{rk}\mathcal{F} = 1$, а $\deg\mathcal{F} = 0$, то звідси випливає, що $\mathcal{N}_1 = \mathcal{O}_X$, отже, твердження вірне для $r = 1$. Припустимо, що воно вірне для всіх рангів до r (включно). Тоді $\operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{N}_r, \mathcal{O}_X) \simeq \operatorname{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{N}_r)^*$ — одновимірний простір, а тому існує єдиний (з точністю до ізоморфізму) пучок $\mathcal{N}_{r+1}$ такий, що існує нерозщеплювана точна послідовність

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\iota} \mathcal{N}_{r+1} \xrightarrow{\pi} \mathcal{N}_r \to 0. \tag{2.2}$$

Вона індукує точну послідовність

$$\begin{aligned}
0 \to \operatorname{Hom}_X(\mathcal{N}_r, \mathcal{O}_X) &\xrightarrow{\pi^0} \operatorname{Hom}_X(\mathcal{N}_{r+1}, \mathcal{O}_X) \to \\
\to \operatorname{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) &\xrightarrow{\delta} \operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{N}_r, \mathcal{O}_X) \to \\
\to \operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{N}_{r+1}, \mathcal{O}_X) &\xrightarrow{\iota^1} \operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \to 0,
\end{aligned}$$

де $\delta \neq 0$, оскільки послідовність (2.2) нерозщеплювана. Але обидва простори $\operatorname{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ і $\operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{N}_r, \mathcal{O}_X)$ одновимірні, отже, δ — ізоморфізм. Тоді й ι^1 і π^0 — також ізоморфізми, а тому $\mathrm{h}^0(\mathcal{N}_{r+1}) = \mathrm{h}^1(\mathcal{N}_{r+1}) = 1$. Звідси випливає, що пучок $\mathcal{N}_{r+1}$ нерозкладний. Дійсно, якщо б існував нетривіальний розклад $\mathcal{N}_{r+1} = \mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}''$, то один з просторів $\operatorname{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}')$ чи $\operatorname{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}'')$ мав би бути нульовим. Але якщо, наприклад, $\operatorname{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}'') = 0$, то $\operatorname{Im}\iota \subseteq \mathcal{F}'$, а тоді $\mathcal{N}_r \simeq$

$\simeq \mathcal{F}'/\operatorname{Im}\iota \oplus \mathcal{F}''$. Оскільки пучок $\mathcal{N}_r$ є нерозкладним, $\operatorname{Im}\iota = \mathcal{F}'$, тобто послідовність (2.2) є розщеплюваною, що неможливо.

Нехай тепер $\mathcal{F} \in \mathrm{VB}_0$ — нерозкладне (а тому, згідно з твердженням 2.5(5), напівстабільне) векторне розшарування рангу $r+1$ з $\mathrm{h}^0(\mathcal{F}) > 0$. Існує нерозщеплювана точна послідовність

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0, \tag{2.3}$$

в якій $\mathcal{G}$ має степінь 0 і ранг r. Якщо $\mathcal{G}'$ — підпучок $\mathcal{G}$, то $\mathcal{G}/\mathcal{G}'$ — факторпучок $\mathcal{F}$, тому $\deg \mathcal{G}/\mathcal{G}' \geqslant 0$, а тоді $\deg \mathcal{G}' \leqslant 0$. Зокрема, пучок $\mathcal{G}$ також є напівстабільним і не має підпучків-хмарочосів, степінь яких завжди додатна. Отже, $\mathcal{G}$ є векторним розшаруванням. Достатньо довести, що $\mathcal{G} \simeq \mathcal{N}_r$. У протилежному випадку $\mathcal{G}$ розкладається: $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$ і $\deg \mathcal{G}_1 = \deg \mathcal{G}_2 = 0$ (інакше один з цих степенів від'ємний, а інший — додатний, що неможливо). Крім того, $\operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{G}_i, \mathcal{O}_X) \neq 0$ $(i = 1,2)$, оскільки $\mathcal{F}$ нерозкладний, а тоді, за формулою (2.1), $\operatorname{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}_i) \neq 0$ і $\mathrm{h}^0(\mathcal{G}) > 1$. З точної послідовності когомологій

$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_X) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{G}) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{O}_X),$$

в якій $\mathrm{h}^0(\mathcal{O}_X) = \mathrm{h}^1(\mathcal{O}_X) = 1$, випливає, що $\mathrm{h}^0(\mathcal{F}) > 1$. Ці міркування показують, що $\mathcal{N}_{r+1}$ — це єдиний нерозкладний пучок з VB_0, для якого $\mathrm{h}^0(\mathcal{N}_{r+1}) = 1$.

Аналогічно, існує єдиний пучок $\mathcal{F} \in \mathrm{VB}_0$, який входить у нерозщеплювану точну послідовність

$$0 \to \mathcal{N}_r \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \to \mathcal{O}_X \to 0,$$

він є нерозкладним і $\mathrm{h}^0(\mathcal{F}) = 1$, тобто $\mathcal{F} \simeq \mathcal{N}_{r+1}$. Оскільки X — неособлива крива, то $\mathrm{Ext}^2_X = 0$ і занурення α індукує сюр'єктивне відображення $\alpha^1 : \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{N}_{r+1}, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{N}_r, \mathcal{O}_X)$. Оскільки обидва ці простори одновимірні, α^1 — ізоморфізм. Зауважимо тепер, що, за припущенням індукції, пучок $\mathcal{G}$ з послідовності (2.3) розкладається у пряму суму пучків $\mathcal{N}_i$ з $i \leqslant r$. Елемент $\eta \in \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{G}, \mathcal{O}_X)$, який визначає цю послідовність, задається рядком, компоненти η_i якого належать $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{N}_i, \mathcal{O}_X)$, причому всі вони повинні бути ненульовими (інакше $\mathcal{N}_i$ буде прямим доданком $\mathcal{F}$). Якщо j є найбільшим значенням, при якому $\mathcal{N}_j$ є прямим доданком $\mathcal{G}$, то для кожного $i \leqslant j$ існує морфізм $\alpha_i : \mathcal{N}_j \to \mathcal{N}_i$, який індукує ізоморфізм $\mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{N}_j, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{N}_i, \mathcal{O}_X)$. Зокрема, $\eta_j\alpha_i \neq 0$, звідки випливає, що $\eta_i = c(\eta_j\alpha_i)$ для деякого $c \in \Bbbk$. Якщо $\mathcal{G}$ має ще якийсь доданок $\mathcal{N}_i$, крім $\mathcal{N}_j$, це дає змогу побудувати автоморфізм β пучка $\mathcal{G}$, який робить i-у компоненту $\eta\beta$ нулем. Для цього всі компоненти $\beta_{lk} : \mathcal{N}_k \to \mathcal{N}_l$ покладемо нульовими, крім діагональних, які візьмемо тотожними, та $\beta_{ji} = -c\alpha_i$. Це означає, що пучок $\mathcal{F}$ є розкладним. Отже, $\mathcal{G} \simeq \mathcal{N}_j$, а тому $j = r$. Цим завершується доведення.

□

Нехай тепер $\mathcal{F}$ є нерозкладним векторним розшаруванням, а $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ — лінійне розшарування найбільшого степеня, яке вкладається в $\mathcal{F}$. Тоді в $\mathcal{F}$ немає лінійних підрозшарувань, які були б більшими, ніж $\mathcal{L}$, а факторпучок $\mathcal{F}/\mathcal{L}$ не має скруту, тобто теж є векторним розшаруванням. Згідно з (2.1), $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{L}, \mathcal{F}/\mathcal{L}) \simeq \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{F}/\mathcal{L}, \mathcal{L})^* \neq \neq 0$. Те саме вірне й для кожного прямого доданка пучка $\mathcal{F}/\mathcal{L}$. Нагадаємо, що $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{L}', \mathcal{L}'') \neq 0$, якщо $\mathcal{L}', \mathcal{L}''$ — такі лінійні розшарування, для яких $\deg \mathcal{L}' \leqslant \deg \mathcal{L}''$. Звідси випливає такий результат.

Твердження 2.7. *Нехай $\mathcal{F}$ — нерозкладне векторне розшарування, d_1 — найбільший степінь лінійних підрозшарувань $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$. Тоді існує фільтрація*

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_r = \mathcal{F} \tag{2.4}$$

така, що кожен фактор $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} = \mathcal{L}_i$ є лінійним розшаруванням степеня d_i, причому $d_1 \leqslant \leqslant d_2 \leqslant \ldots d_r$ і також $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_i) \neq 0$ для всіх i. Зокрема, якщо $\mathrm{h}^0(\mathcal{F}) \neq 0$, то й $\mathrm{h}^0(\mathcal{L}_i) \neq 0$ для всіх i.

Таку фільтрацію будемо називати *максимальною лінійною фільтрацією*.[2]

Твердження 2.8. *Нехай $\mathcal{F}$ — нерозкладне векторне розшарування,* $\operatorname{rk}\mathcal{F} = r$, $\deg\mathcal{F} = d$, *причому* $\mathrm{h}^0(X,\mathcal{F}) = h > 0$ (*остання умова завжди виконана, якщо* $d > 0$).

(1) *Якщо $d < r$, то $\mathcal{F}$ має тривіальне підрозшарування $\mathcal{F}_0 \simeq h\mathcal{O}_X$ таке, що $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$ є також векторним розшаруванням, а* $\mathcal{F}_0 = \sum_{f:\mathcal{O}_X\to\mathcal{F}} \operatorname{Im} f$.

(2) *Якщо $d \geqslant r$, то $\mathcal{F}$ має максимальну лінійну фільтрацію (2.4), в якій усі $d_i > 0$.*

(3) *Якщо $d = r$, то $\mathcal{F}$ має фільтрацію, в якій усі фактори ізоморфні одному й тому ж лінійному розшаруванню $\mathcal{L}$ степеня 1.*

Зокрема, в усіх випадках $d \geqslant 0$.

Доведення. (1). Розглянемо максимальну лінійну фільтрацію (2.4). В ній $d_1 \leqslant 0$. Оскільки $\operatorname{Hom}_X(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}) \neq 0$, то $d_1 = 0$, а $\mathcal{L}_1 \simeq \mathcal{O}_X$. Крім того, якщо $f : \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ — довільний ненульовий морфізм, то $\mathcal{F}/\operatorname{Im} f$ не має скруту: інакше можна було б обрати в якості $\mathcal{L}_1$ лінійне розшарування, строго більше, ніж $\operatorname{Im} f$, а тому додатного степеня, що неможливо. Це означає, що відображення на шарах $f(x) : \mathbb{k}(x) \to \mathcal{F}(x)$ ненульове

[2] Атья [**10**] називає таку фільтрацію «максимальним розщепленням», але це не узгоджується з загальним значенням терміну «розщеплення».

для кожної точки $x \in X$. Нехай $f_1, f_2, \ldots, f_h$ — база $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{H}^0(X, \mathcal{F})$. Тоді $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_h(x)$ є лінійно незалежними відображеннями $\Bbbk(x) \to \mathcal{F}(x)$ для кожної точки $x \in X$. Тому морфізм $\phi : h\mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ з компонентами $f_1, f_2, \ldots, f_h$ є зануренням, а факторпучок $\mathcal{F}/\operatorname{Im}\phi$ є локально вільним. За побудовою, $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im}\phi$ для кожного $f : \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$.

(2–3). Знову розглянемо максимальну лінійну фільтрацію (2.4). Якщо $d_1 = 0$, ті самі міркування доводять, що $\mathcal{F}$ містить підпучок $\mathcal{F}_0 \simeq h\mathcal{O}_X$ такий, що $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$ знову є векторним розшаруванням. Оскільки $h \geqslant d \geqslant r$, тоді $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, що неможливо. Отже, $d_1 \geqslant 1$. Якщо $d = r$, то, очевидно, $d_i = 1$ для всіх i, а з того, що $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_i) \neq 0$, випливає, що $\mathcal{L}_1 \simeq \mathcal{L}_i$ для всіх i. $\square$

Наслідок 2.9. (1) *Для кожного лінійного розшарування $\mathcal{L}$ степеня 0 і кожного додатного r існує єдине (з точністю до ізоморфізму) нерозкладне векторне розшарування $\mathcal{N}_r(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \otimes \mathcal{N}_r$ рангу r і степеня 0 таке, що $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{N}_r(\mathcal{L})) \neq 0$. Це векторне розшарування має фільтрацію, всі фактори якої ізоморфні $\mathcal{L}$.*

(2) *Будь-яке векторне розшарування степеня 0 ізоморфне $\mathcal{N}_r(\mathcal{L})$ для деяких r та $\mathcal{L}$.*

Доведення. (1) очевидне, оскільки функтор $\mathcal{L}\otimes\_$, де $\mathcal{L}$ — лінійне розшарування, є автоеквівалентністю категорії $\mathrm{VB}(X)$.

(2). Нехай $\mathcal{F}$ — нерозкладне векторне розшарування рангу r і степеня 0. Виберемо якесь лінійне розшарування $\mathcal{L}_1$ степеня 1. Тоді $\deg \mathcal{L}_1\otimes\mathcal{F} = r$, а тому $\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{F}$ має фільтрацію, всі фактори якої ізоморфні фіксованому лінійному розшаруванню $\mathcal{L}_2$ степеня 1, зокрема, якщо покласти $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1^\vee\otimes\mathcal{L}_2$ (це — лінійне розшарування степеня 0), то $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{L},\mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_X(\mathcal{L}_2,\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{F}) \neq 0$, отже, $\mathcal{F}\simeq\mathcal{N}_r(\mathcal{L})$. □

Теорема 2.10. *Нехай $\mathcal{F}$ — нерозкладне векторне розшарування рангу r і степеня $d>0$.*

(1) $\mathrm{h}^0(\mathcal{F}) = d$, *а* $\mathrm{h}^1(\mathcal{F}) = 0$.

Далі припустимо, крім того, що $d<r$.

(2) *Існує точна послідовність*

$$0\to\mathcal{F}_0\to\mathcal{F}\to\mathcal{F}_1\to 0, \tag{2.5}$$

де $\mathcal{F}_0 = \sum_{f:\mathcal{O}_X\to\mathcal{F}}\mathrm{Im}\, f \simeq d\mathcal{O}_X$, а $\mathcal{F}_1$ теж є нерозкладним векторним розшаруванням того ж степеня, але рангу $r-d$.

(3) *Пучок $\mathcal{F}_1$ визначає $\mathcal{F}$ з точністю до ізоморфізму і кожне нерозкладне векторне розшарування степеня d і рангу $r-d$ є ізоморфним розшаруванню $\mathcal{F}_1$ для деякого нерозкладного розшарування $\mathcal{F}$ рангу r і степеня d.*

Доведення. Якщо $r = 1$ і $d > 0$, то $\mathrm{h}^1(\mathcal{F}) = 0$, а тому $\mathrm{h}^0(\mathcal{F}) = d$. Отже, можна вважати, що $r > 0$ і теорема є вірною для всіх векторних розшарувань менших рангів. Скористаймося твердженням 2.8. Якщо $r \leqslant d$, то $\mathcal{F}$ має фільтрацію з факторами $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_r$, де всі $\mathcal{L}_i$ — лінійні розшарування з $\deg \mathcal{L}_i > 0$. Тоді $\mathrm{h}^1(\mathcal{L}_i) = 0$, звідки отримуємо, що й $\mathrm{h}^1(\mathcal{F}) = 0$, а тому $\mathrm{h}^0(\mathcal{F}) = d$.

Нехай $d < r$ і $h = \mathrm{h}^0(\mathcal{F})$. Розглянемо точну послідовність (2.5), де $\mathcal{F}_0 = \sum_{f:\mathcal{O}_X \to \mathcal{F}} \operatorname{Im} f \simeq h\mathcal{O}_X$, а $\mathcal{F}_1$ також є векторним розшаруванням. Вона визначає елемент $\xi \in \operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{F}_1, h\mathcal{O}_X)$, який ототожнюється з послідовністю $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h)$, де $\xi_i \in \operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{F}_1, \mathcal{O}_X)$. Оскільки пучок $\mathcal{F}$ є нерозкладним, елементи ξ_i є лінійно незалежними: інакше один з них можна вважати нулем, а тоді $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}' \oplus \mathcal{O}_X$. Це означає, що відображення

$$\eta : \mathbb{k}^h \to \operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{F}_1, \mathcal{O}_X) \simeq \mathrm{H}^0(\mathcal{F}_1)^*,$$

яке індуковане послідовністю (2.5), тобто відображає вектор $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h)$ в елемент $\sum_{i=1}^h \lambda_i \xi_i$, є мономорфізмом. З іншого боку, $\mathrm{h}^1(\mathcal{F}_1) \leqslant \mathrm{h}^1(\mathcal{F})$, а $\deg \mathcal{F}_1 = \deg \mathcal{F}$, оскільки $\deg \mathcal{O}_X = 0$. Тому й $\mathrm{h}^0(\mathcal{F}_1) \leqslant \mathrm{h}^0(\mathcal{F}) = h$. Отже, η є ізоморфізмом, а $\mathrm{h}^i(\mathcal{F}_1) = \mathrm{h}^i(\mathcal{F})$ $(i = 0, 1)$. Якщо ж ξ' — інший елемент з $\operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{F}_1, h\mathcal{O}_X)$, для якого відповідне розширення $\mathcal{F}'$ пучка $\mathcal{F}_1$ з ядром $h\mathcal{O}_X$ нерозкладне, то знайдеться автоморфізм α пучка $h\mathcal{O}_X$ такий, що $\alpha\xi = \xi'$, а тому $\mathcal{F}' \simeq \mathcal{F}$.

Припустимо, що $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1^1 \oplus \mathcal{F}_1^2$. Тоді можна обрати розклад $h\mathcal{O}_X \simeq h_1\mathcal{O}_X \oplus h_2\mathcal{O}_X$ так, щоб елемент ξ відповідав матриці вигляду $\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix}$, де $\xi_k \in \operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{F}_1^k, h_k\mathcal{O}_X)$, звідки $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}^1 \oplus \mathcal{F}^2$, де $\mathcal{F}^k$ визначається елементом ξ_k, що неможливо. Отже, $\mathcal{F}_1$ — нерозкладний. За припущенням індукції з того, що $\operatorname{rk}\mathcal{F}_1 < \operatorname{rk}\mathcal{F}$, а $\deg\mathcal{F}_1 = d$, випливає, що $h = \mathrm{h}^0(\mathcal{F}_1) = d$.

Нехай тепер $\mathcal{G}$ — довільне нерозкладне векторне розшарування степеня d і рангу $r - d$. Тоді, за припущенням індукції і формулою (2.1), $\dim\operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{G}, \mathcal{O}_X) = \mathrm{h}^0(\mathcal{G}) = d$. Оберемо базу цього простору $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_d$ і розглянемо точну послідовність

$$0 \to d\mathcal{O}_X \xrightarrow{\iota} \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G} \to 0,$$

задану елементом

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_d) \in \operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{G}, d\mathcal{O}_X) \simeq d\operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{G}, \mathcal{O}_X).$$

Вона індукує точну послідовність

$$\begin{aligned} 0 \to \operatorname{Hom}_X(\mathcal{G}, \mathcal{O}_X) \to \operatorname{Hom}_X(\tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{O}_X) \to \\ \to \operatorname{Hom}_X(d\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\delta} \operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{G}, \mathcal{O}_X) \to \\ \to \operatorname{Ext}^1_X(\tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{O}_X) \to \operatorname{Ext}^1_X(d\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \to 0. \end{aligned}$$

За побудовою, гомоморфізм δ є ізоморфізмом. Крім того, $\operatorname{Hom}_X(\mathcal{G}, \mathcal{O}_X) \simeq \mathrm{H}^1(\mathcal{G})^* = 0$, тому $\operatorname{Hom}_X(\tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{O}_X) = 0$, а $\mathrm{h}^0(\tilde{\mathcal{G}}) = \dim\operatorname{Ext}^1_X(\tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{O}_X) =$

$= d$. Якщо $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}' \oplus \tilde{\mathcal{G}}''$, то можна вважати, що пучок $\tilde{\mathcal{G}}'$ — нерозкладний додатного степеня d'. Тоді $\mathrm{h}^0(\tilde{\mathcal{G}}') = d'$, а $\mathrm{h}^0(\tilde{\mathcal{G}}'') = d - d' = \deg \tilde{\mathcal{G}}''$. За таких умов морфізм ι можна обрати у вигляді $\iota' \oplus \iota''$, де $\iota' : d'\mathcal{O}_X \to \tilde{\mathcal{G}}'$, $\iota'' : d''\mathcal{O}_X \to \tilde{\mathcal{G}}''$. Звідси випливає, що $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}' \oplus \mathcal{G}''$, де $\mathcal{G}' = \operatorname{Coker} \iota'$, $\mathcal{G}'' = \operatorname{Coker} \iota''$. Це протиріччя завершує доведення. □

Зауважимо, що $\operatorname{rk}(\mathcal{F}_1) = r - d$, отже, $\mu(\mathcal{F}_1) = = d/(r-d) = \mu/(1-\mu)$, де $\mu = \mu(\mathcal{F}) = d/r$.

Наслідок 2.11. *Якщо $0 < \mu < 1$, то існує еквівалентність категорій $\alpha_\mu : \mathrm{VB}_\mu \to \mathrm{VB}_{\mu'}$, де $\mu' = \mu/(1-\mu)$.*

Доведення. Достатньо визначити функтор $\alpha = \alpha_\mu$ на нерозкладних векторних розшаруваннях. Нехай розшарування $\mathcal{F} \in \mathrm{VB}_\mu$ — нерозкладне, $r = \operatorname{rk} \mathcal{F}$, $d = \deg \mathcal{F}$. Скористаємося точною послідовністю (2.5). Нагадаємо, що $\mathrm{h}^0(\mathcal{F}) = \mathrm{h}^0(\mathcal{F}_1) = d$, а елемент $\xi \in \operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_0) \simeq \simeq d \operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{F}_1, \mathcal{O}_X)$, який визначає послідовність (2.5), задається рядком $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$, де $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$ — база простору $\operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{F}_1, \mathcal{O}_X)$. Нехай $\mathcal{F}'$ — інше нерозкладне розшарування з VB_μ рангу r' і степеня d', а

$$0 \to \mathcal{F}'_0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}'_1 \to 0$$

— відповідна точна послідовність, визначена елементом $\xi' \in d' \operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{F}'_1, \mathcal{O}_X)$. Кожен гомоморфізм $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ відображає $\mathcal{F}_0$ у $\mathcal{F}'_0$, а тому індукує гомоморфізм $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}'_1$. Отже, ми отримали функтор $\alpha : \mathrm{VB}_\mu \to \mathrm{VB}_{\mu'}$, де

$$\alpha(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_1 = \mathcal{F} / \sum_{f:\mathcal{O}_X \to \mathcal{F}} \operatorname{Im} f.$$

Побудуємо обернений функтор $\beta : \mathrm{VB}_{\mu'} \to \mathrm{VB}_\mu$. Ми знаємо, що кожне нерозкладне векторне розшарування $\mathrm{VB}_{\mu'}$ ізоморфне якомусь $\mathcal{F}_1$ з послідовності вигляду (2.5), причому пучок $\mathcal{F}$ в ній визначений з точністю до ізоморфізму. Покладемо $\beta(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}$. Нехай $\mathcal{F}' = \beta(\mathcal{F}'_1)$, а $f_1 : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}'_1$ — деякий гомоморфізм. Розглянемо відповідні елементи ξ та ξ' з Ext-просторів у такий спосіб, як це було зроблено вище. Оскільки компоненти ξ утворюють базу $\mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{F}_1, \mathcal{O}_X)$, то існує єдиний гомоморфізм $f_0 : \mathcal{F}_0 \simeq d\mathcal{O}_X \to \mathcal{F}'_0 \simeq d'\mathcal{O}_X$, для якого $f_0\xi = \xi' f_1$. Це означає, що f_0 та f_1 виникають з комутативної діаграми

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle f_0}\big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'_0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{F}'_1 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

в якій гомоморфізм f визначається однозначно. Поклавши $\beta(f_1) = f$, завершуємо побудову функтора β. Очевидно, він є оберненим до функтора α, побудованого вище. □

Наслідок 2.12. *Для кожного μ існує еквівалентність категорій $\phi_\mu : \mathrm{VB}_\mu \to \mathrm{VB}_0$. Більше* *того, якщо* $\operatorname{rk}\mathcal{F} = r$, *а* $\deg\mathcal{F} = d$, *то* $\operatorname{rk}\phi_\mu(\mathcal{F}) = = \text{нсд}\,(r, d)$.

Доведення. Якщо $q = \lfloor\mu\rfloor$ (ціла частина числа μ), а $\mathcal{L}$ — лінійне розшарування степеня $-q$, то функтор $\mathcal{L} \otimes \_$ задає еквівалентність $\mathrm{VB}_\mu \to \mathrm{VB}_{\mu-q}$. При цьому векторне розшарування рангу r і степеня d переходить у розшарування того ж рангу і степеня $r - qd$. Якщо ж $0 < \mu < 1$, то функтор α_μ є еквівалентністю $\mathrm{VB}_\mu \to \mathrm{VB}_{\mu/(1-\mu)}$, при якій векторне розшарування рангу r і степеня d переходить у розшарування того ж степеня і рангу $r-d$. Повторення цих процедур рівносильне застосуванню алгоритму Евкліда до пари r, d. Звідси, очевидно, випливає твердження. □

Наслідок 2.13. *Нерозкладне векторне розшарування* $\mathcal{F}$ *рангу* r *і степеня* d *є стабільним тоді й тільки тоді, коли* $\text{нсд}\,(r, d) = 1$. *У цьому випадку стабільні векторні розшарування рангу* r *і степеня* d *знаходяться у взаємно однозначній відповідності з* $\mathrm{Pic}_0\, X \simeq X$.

Доведення. Нагадаємо, що в нашому випадку стабільні розшарування — це те саме, що цеглини (наслідок 2.4 та твердження 2.5 (3)). Тому еквівалентність категорій ϕ_μ зводить доведення до випадку, коли $\mu(\mathcal{F}) = 0$. Тоді твердження випливає з наслідку 2.9. □

Зауваження 2.14. Підсумуємо відомості про когомології нерозкладних векторних розшарувань, які містяться у попередніх результатах. Якщо $\mathcal{F}$ — нерозкладне векторне розшарування степеня d, то

$$\mathrm{h}^0(X,\mathcal{F}) = \begin{cases} d, & \text{якщо } d>0, \\ 1, & \text{якщо } d=0,\ \mathcal{F}\simeq\mathcal{N}_r, \\ 0 & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

$$\mathrm{h}^1(X,\mathcal{F}) = \begin{cases} -d, & \text{якщо } d<0, \\ 1, & \text{якщо } d=0,\ \mathcal{F}\simeq\mathcal{N}_r, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Вправа 2.15. (1) З побудови векторних розшарувань $\mathcal{N}_r$ у доведенні теореми 2.7 виведіть, що існують природні ізоморфізми

$$\mathrm{Hom}_X(\mathcal{N}_r,\mathcal{N}_m)\simeq\mathrm{Hom}_{\Bbbk[t]}(\Bbbk[t]/t^r,\Bbbk[t]/t^m).$$

(2) Доведіть, що $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{L}\otimes\mathcal{N}_r,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{N}_m)=0$, якщо $\mathcal{L}$ та $\mathcal{L}'$ — неізоморфні лінійні розшарування.

(3) Виведіть з (1) і (2), що категорія VB_0 (а тому й кожна VB_μ) еквівалентна категорії VB_∞ хмарочосів над кривою X.

Вправа 2.16. Нехай $\mathcal{F}$ — нерозкладне векторне розшарування з нахилом 1, $\mathcal{F}_0=\sum_{f:\mathcal{O}_X\to\mathcal{F}}\mathrm{Im}\, f$ і $\mathcal{F}_1=\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$. Доведіть, що

(1) $\operatorname{rk}\mathcal{F}_0 = r$, а $\deg\mathcal{F}_0 = 0$; отже, $\mathcal{F}_1$ — хмарочос степеня d.

(2) Доведіть, що пучок $\mathcal{F}_1$ також є нерозкладним, пучок $\mathcal{F}$ однозначно відновлюється за $\mathcal{F}_1$ і кожен нерозкладний хмарочос степеня d ізоморфний $\mathcal{F}_1$ для деякого нерозкладного векторного розшарування $\mathcal{F}$ з $\operatorname{rk}\mathcal{F} = \deg\mathcal{F} = d$.

(3) Виведіть звідси, що відповідність $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_1$ задає еквівалентність категорій $\mathrm{VB}_1 \to \mathrm{VB}_\infty$. Ці міркування дають альтернативне доведення твердження (3) з вправи 2.17.

Порада: (1) нескладно доводиться індукцією за рангом. Далі можна наслідувати доведення теореми 2.10 та наслідку 2.11.

Як довів Ода [**30**], ці конструкції можна виконати так, що в результаті одержуються *сім'ї* нерозкладних векторних розшарувань, параметризовані точками кривої X. Ось формулювання його результату (ми не наводимо доведення, оскільки воно потребує істотно складнішої техніки). Позначимо через nx замкнену підсхему в X, визначену пучком ідеалів $\mathcal{O}_X(-nx)$, а через i_{nx} — занурення $X \times nx \to X \times X$.

Теорема 2.17. *Якщо* $\operatorname{нсд}(r,d) = 1$ *і* $r > 0$, *то існує векторне розшарування* $\mathcal{P}_{r,d}$ *над* $X \times X$ *таке, що для довільного* $n > 0$ *кожне нерозкладне* *векторне розшарування над* X *рангу* nr *і степеня* nd *ізоморфне* $p_{1*}i^*_{nx}\mathcal{P}_{r,d}$ *для однозначно визначеної точки* $x \in X$. *Більше того,* $\mathcal{P}_{r,d+mr} \simeq \simeq \mathcal{P}_{r,d}(m(o \times X))$, *а* $\mathcal{P}_{1,0} \simeq \mathcal{P}$.

Розділ 3

Сендвіч-процедура

Далі будемо вважати, що X — *особлива проективна крива* (зведена і зв'язна, але, можливо, звідна). Нехай $S = \operatorname{Sing} X$ — множина особливих точок кривої X, $\pi : \tilde{X} \to X$ — *нормалізація* X (див. [**4**, Розділ 3.7] або [**9**, Упражнение II.3.8]), тобто біраціональний скінченний морфізм такий, що крива $\tilde{X}$ неособлива (нагадаємо, що нормалізація визначена з точністю до ізоморфізму). Позначимо $\widetilde{S} = \pi^{-1}(S)$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$, $\widetilde{\mathcal{O}} = \pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$. Тоді $\widetilde{\mathcal{O}}$ є когерентним пучком кілець на X, а $\mathcal{O}$ ототожнюється з його підпучком. Крім того, пучок $\mathcal{O}$-модулів $\widetilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ є хмарочосом з носієм S. Нехай $\mathcal{J} = \operatorname{Ann}(\widetilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ — *кондуктор* $\widetilde{\mathcal{O}}$ в $\mathcal{O}$ (найбільший пучок $\widetilde{\mathcal{O}}$-ідеалів, який міститься в $\mathcal{O}$). Для кожного векторного розшарування $\mathcal{F}$ над X можна розглянути пучок $\widetilde{\mathcal{F}} = \widetilde{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F} \simeq \pi_*\pi^*\mathcal{F}$. Очевидно, $\widetilde{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{F} \supset \supset \mathcal{J}\mathcal{F} = \mathcal{J}\widetilde{\mathcal{F}}$. Більше того, $\widetilde{\mathcal{F}}/\mathcal{J}\widetilde{\mathcal{F}}$ і $\mathcal{F}/\mathcal{J}\mathcal{F}$ — хмарочоси з носієм S, а тому вони повністю визначаються своїми стеблами в точках $x \in S$. Позначимо $\mathsf{A}_x = (\mathcal{O}/\mathcal{J})_x$ і $\mathsf{B}_x = (\widetilde{\mathcal{O}}/\mathcal{J})_x$. Це скінченновимірні комутативні $\Bbbk$-алгебри і $\mathsf{A}_x \subseteq \mathsf{B}_x$. Позначимо також $\mathsf{F}_x = (\mathcal{F}/\mathcal{J}\mathcal{F})_x$, $\widetilde{\mathsf{F}}_x = (\widetilde{\mathcal{F}}/\mathcal{J}\widetilde{\mathcal{F}})_x$.

Це вільні модулі рангу $r = \operatorname{rk}\mathcal{F}$ над алгебрами, відповідно, A_x і B_x, причому $\mathsf{F}_x \subseteq \widetilde{\mathsf{F}}_x$. Далі нам буде зручно ототожнювати пучки $\mathcal{F}/\mathcal{J}\mathcal{F}$ та $\widetilde{\mathcal{F}}/\mathcal{J}\widetilde{\mathcal{F}}$ з модулями $\mathsf{F} = \bigoplus_{x\in S}\mathsf{F}_x$ та $\widetilde{\mathsf{F}} = \bigoplus_{x\in S}\widetilde{\mathsf{F}}_x$ над алгебрами, відповідно, $\mathsf{A} = \bigoplus_{x\in S}\mathsf{A}_x$ та $\mathsf{B} = \bigoplus_{x\in S}\mathsf{B}_x$. Отже, векторне розшарування $\mathcal{F}$ над X визначається трійкою $T(\mathcal{F}) = (\widetilde{\mathcal{F}}, \mathsf{F}, \iota_{\mathcal{F}})$, де $\iota_{\mathcal{F}} : \mathsf{F} \to \widetilde{\mathsf{F}}$ — природне занурення.

Зазначимо, що, оскільки морфізм π є скінченним і біраціональним, ядро природного морфізму $\pi^*\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} \to \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ є теж хмарочосом (нульовим поза S). Тому для кожного когерентного пучка $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-модулів $\mathcal{H}$ ядро відображення $\pi^*\pi_*\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ також є хмарочосом. Звідси випливає, що для кожного пучка $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-модулів без скруту $\mathcal{H}'$

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\tilde{X}}(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \simeq \operatorname{Hom}_{\tilde{X}}(\pi^*\pi_*\mathcal{H}, \mathcal{H}') \simeq \\ \simeq \operatorname{Hom}_X(\pi_*\mathcal{H}, \pi_*\mathcal{H}').\end{aligned}$$

Зокрема, π_* індукує еквівалентність між категорією векторних розшарувань постійного рангу над $\tilde{X}$ та категорією локально вільних пучків $\widetilde{\mathcal{O}}$-модулів. Тому надалі ми завжди ототожнюємо ці дві категорії, зокрема, ототожнюємо пучок $\widetilde{\mathcal{F}}$, визначений вище, з $\pi^*\mathcal{F}$.

Визначимо тепер *сендвіч-категорію* (або *категорію трійок*) $\mathscr{T}(X)$ в такий спосіб:

- *Об'єкти* $\mathscr{T}(X)$ — це трійки $(\mathcal{G}, \mathsf{F}, \iota)$, де $\mathcal{G}$ — локально вільний пучок $\widetilde{\mathcal{O}}$-модулів, або, що те саме, векторне розшаруваня постійного рангу r над $\tilde{X}$, F — вільний A-модуль рангу r, а ι — такий мономорфізм A-модулів $\mathsf{F} \to \mathsf{G}$, де $\mathsf{G} = \mathcal{G}/\mathcal{J}\mathcal{G}$, що $\mathsf{B}\,\mathrm{Im}\,\iota = \mathsf{G}$.

- *Морфізм* $f : (\mathcal{G}, \mathsf{F}, \iota) \to (\mathcal{G}', \mathsf{F}', \iota')$ — це пара (f_l, f_r), в якій $f_l \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{O}}}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$, $f_r \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(\mathsf{F}, \mathsf{F}')$, причому діаграма

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{F} & \xrightarrow{\iota} & \mathsf{G} \\ {\scriptstyle f_r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}_l} \\ \mathsf{F}' & \xrightarrow[\iota']{} & \mathsf{G}', \end{array} \tag{3.1}$$

де $\bar{f}_l = f_l \pmod{\mathcal{J}}$, є комутативною.

Теорема 3.1 (**Сендвіч-теорема**). *Відповідність* $\mathcal{F} \mapsto T(\mathcal{F})$ *визначає еквівалентність категорій* $\mathrm{VB}(X) \to \mathscr{T}(X)$.

Доведення. Очевидно, що побудована вище трійка $T(\mathcal{F}) = (\widetilde{\mathcal{F}}, \mathsf{F}, \iota_{\mathcal{F}})$ належить до $\mathscr{T}(X)$. Кожен морфізм $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ індукує морфізми $\widetilde{f} : \widetilde{\mathcal{F}} \to \widetilde{\mathcal{F}}'$ та $\bar{f} : \mathsf{F} \to \mathsf{F}'$ такі, що відповідна діаграма вигляду (3.1) комутативна, а тому $T(f) = (\widetilde{f}, \bar{f})$ є морфізмом $T(\mathcal{F}) \to T(\mathcal{F}')$. Отже, T є функтором $\mathrm{VB}(X) \to \mathscr{T}(X)$. Побудуємо обернений функтор $R : \mathscr{T}(X) \to \mathrm{VB}(X)$.

Нехай $\mathsf{T} = (\mathcal{G}, \mathsf{F}, \iota)$ — трійка з $\mathscr{T}(X)$, де $\mathrm{rk}\,\mathcal{G} = r$. Розглянемо прообраз $\mathcal{F}$ підпучка $\mathrm{Im}\,\iota \simeq \mathsf{F}$

в $\mathcal{G}$. Тоді $\widetilde{\mathcal{O}}\mathcal{F} = \mathcal{G}$, тому $\mathcal{J}\mathcal{F} = \mathcal{J}\mathcal{G}$ і природне відображення $p : \widetilde{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ є епіморфізмом. Розглянемо стебло $\mathcal{F}_x$. Якщо $x \notin S$, то воно співпадає з $\mathcal{G}_x$, тобто є вільним модулем рангу r над $\mathcal{O}_x = \widetilde{\mathcal{O}}_x$. Якщо $x \in S$, то існує епіморфізм $r\mathcal{O}_x \to \mathsf{F}_x = \mathcal{F}_x/\mathcal{J}_x\mathcal{F}_x$. Оскільки $\mathcal{J}_x \subseteq \operatorname{rad} \mathcal{O}_x$, він піднімається до епіморфізма $\phi : r\mathcal{O}_x \to \mathcal{F}_x$. Останній індукує епіморфізм $\widetilde{\phi} : r\widetilde{\mathcal{O}}_x \to \widetilde{\mathcal{O}}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x$. Разом з p вони визначають епіморфізм $p_x\widetilde{\phi} : r\widetilde{\mathcal{O}}_x \to \mathcal{G}_x$. Оскільки обидва ці модулі є вільними однакового рангу, останній епіморфізм є насправді ізоморфізмом, а оскільки гомоморфізм $\widetilde{\phi}$ — сюр'єктивний, обидва відображення $\widetilde{\phi}$ та p_x (а тоді й p) також є ізоморфізмами. Тому відображення ϕ — ін'єктивне, тобто теж є ізоморфізмом, і пучок $\mathcal{F}$ є локально вільним рангу r. Позначимо $R(\mathsf{T}) = \mathcal{F}$. Якщо $f = (f_l, f_r)$ є морфізмом $\mathsf{T} \to \mathsf{T}' = (\mathcal{G}', \mathsf{F}', \iota')$, то він індукує морфізм $R(f) : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$, де $\mathcal{F}'$ — прообраз $\operatorname{Im} \iota'$ у $\pi_*\mathcal{G}'$. Таким чином, ми побудували функтор $R : \mathscr{T}(X) \to \mathrm{VB}(X)$. Очевидно, $RT(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ (ми ототожнюємо $\mathcal{F}$ з $1 \otimes \mathcal{F} \subset \subset \widetilde{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}$) і $RT(f) = f$. Крім того, ізоморфізм $p : \widetilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{G}$, побудований вище, визначає функторіальний ізоморфізм трійок $TR(\mathsf{T}) = T(\mathcal{F}) = (\widetilde{\mathcal{F}}, \mathsf{F}, \iota_{\mathcal{F}}) \simeq \mathsf{T}$. Тому функтор R дійсно є оберненим до функтора T. $\square$

Зауваження 3.2. Нагадаємо, що для довільних A-модуля F і B-модуля G має місце ізоморфізм $\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(\mathsf{F},\mathsf{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{B}}(\mathsf{B}\otimes_{\mathsf{A}}\mathsf{F},\mathsf{G})$. Оскільки у трійці $(\mathcal{G},\mathsf{F},\iota)\in\mathscr{T}$ F є вільним A-модулем, а $\mathsf{G}=\mathcal{G}/\mathcal{J}\mathcal{G}$ — вільним B-модулем того ж рангу, умова $\mathsf{B}\,\mathrm{Im}\,\iota=\mathsf{G}$ рівносильна тому, що відображення $\tilde{\iota}:\mathsf{B}\otimes_{\mathsf{A}}\mathsf{F}\to\mathsf{G}$, яке відповідає ι, є ізоморфізмом.

Розділ 4

Бімодульні категорії

Сендвіч-процедуру з попереднього розділу можна переформулювати на мові *бімодульних категорій*, яка є звичною й широко вживаною в теорії зображень алгебр. Нагадаємо відповідні означення. При цьому зручніше розглядати модулі й бімодулі над категоріями, ніж над алгебрами. Ми завжди вважатимемо, що категорія $\mathscr{A}$ є $\Bbbk$-*лінійною* й *цілком адитивною*. Перший термін означає, що множини морфізмів $\mathscr{A}(A, A')$ є векторними просторами над $\Bbbk$, а множення морфізмів є $\Bbbk$-білінійним. Другий означає, що категорія $\mathscr{A}$ є *адитивною*, тобто містить всі можливі скінченні прямі суми, і крім того, кожен ідемпотентний морфізм $e : A \to A$, $e^2 = e$, в ній *розщеплюється*, тобто походить з деякого розкладу у пряму суму $A \simeq A_1 \oplus A_2$ як добуток $e = i_1 p_1$, де $i_1 : A_1 \to A$ — канонічне занурення, а $p_1 : A \to A_1$ — канонічна проекція. Всі функтори будемо вважати $\Bbbk$-лінійними.

За означенням, $\mathscr{A}$-*модуль* — це ($\Bbbk$-лінійний) функтор $\mathscr{M} : \mathscr{A} \to \mathsf{Vec}$, де Vec — це категорія векторних просторів над полем $\Bbbk$. Такі модулі утворюють категорію $\mathscr{A}$-Mod ($\Bbbk$-лінійну й цілком адитивну). Якщо $\mathscr{M}$ — деякий $\mathscr{A}$-модуль, $v \in \mathscr{M}(A)$ і $a \in \mathscr{A}(A, A')$, будемо писати av замість $\mathscr{M}(a)v$; це — елемент з $\mathscr{M}(A')$. Якщо $\mathscr{B}$ — ще деяка категорія, то *$\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-бімодулем* зветься ($\Bbbk$-білінійний) функтор $\mathscr{W} : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{B} \to \mathsf{Vec}$, де $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ позначає *дуальну категорію* до $\mathscr{A}$.[1] Знову, якщо $v \in \mathscr{W}(A, B)$, $a \in \mathscr{A}(A', A)$, $b \in \mathscr{B}(B, B')$, будемо писати bva замість $B(a, b)$; це — елемент з $\mathscr{W}(A', B')$. Якщо $\mathscr{A} = \mathscr{B}$, замість «$\mathscr{A}$-$\mathscr{A}$-бімодуль» будемо казати «$\mathscr{A}$-бімодуль».

Нехай $\mathscr{W}$ — деякий $\mathscr{A}$-бімодуль (тобто $\mathscr{A}$-$\mathscr{A}$-бімодуль). *Бімодульна категорія* $\mathsf{El}(\mathscr{V})$ визначається в такий спосіб:

- $\mathrm{Ob}\,\mathsf{El}(\mathscr{V}) = \bigcup_{A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}} \mathscr{V}(A, A)$.
- *Морфізм* $a : v \to v'$, де $v \in \mathscr{V}(A, A)$, $v' \in \mathscr{V}(A', A')$ — це морфізм $a : A \to A'$, для якого $av = v'a$ (обидва ці елементи належать $\mathscr{V}(A, A')$).
- Добуток морфізмів — це їхній добуток в категорії $\mathscr{A}$.

Легко бачити, що $\mathsf{El}(\mathscr{V})$ дійсно є $\Bbbk$-лінійною й цілком адитивною категорією.

[1] Нагадаємо, що об'єкти й морфізми дуальної категорії — ті самі, що й у категорії $\mathscr{A}$, але якщо $\alpha \in \mathscr{A}(A, B)$, то в категорії $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ він належить $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}(B, A)$, а добуток $\alpha\beta$ в категорії $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ — це добуток $\beta\alpha$ в категорії $\mathscr{A}$.

Здебільшого нам доведеться розглядати випадок, коли і категорія $\mathscr{A}$, і бімодуль $\mathscr{W}$ є *локально скінченновимірними*, тобто всі векторні простори $\mathscr{A}(A, A')$ і $\mathscr{W}(A, B)$ є скінченновимірними над полем $\Bbbk$. Оскільки ми вважаємо $\mathscr{A}$ цілком адитивною, звідси випливає, що кожен об'єкт $A \in \mathscr{A}$ розкладається у пряму суму $A \simeq \simeq \bigoplus_{k=1}^{n} A_k$, де всі об'єкти $A_1, A_2, \ldots, A_n$ є нерозкладними, тобто їхні алгебри ендоморфізмів $\mathscr{A}(A_k, A_k)$ не містять ідемпотентів, а тому є локальними [**5**, Следствие 2.3]. Такий розклад є єдиним (з точністю до ізоморфізму й перестановки доданків) (див. [**1**, Глава I, Теорема 3.6], або [**6**, § 3.7, Следствие], або [**8**, Теорема 18.18]). Так буде, наприклад, якщо $\mathscr{A} = \operatorname{Coh} X$ — категорія когерентних пучків на проективному многовиді X або її підкатегорія векторних розшарувань $\mathrm{VB}(X)$. Позначимо через $\operatorname{ind}\mathscr{A}$ деяку (фіксовану) множину представників класів ізоморфізму нерозкладних об'єктів з $\mathscr{A}$. Те саме позначення будемо використовувати і для повної підкатегорію в $\mathscr{A}$ з множиною об'єктів $\operatorname{ind}\mathscr{A}$. Довільний $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-бімодуль $\mathscr{W}$ повністю визначається (з точністю до ізоморфізму) своїм обмеженням на $\operatorname{ind}\mathscr{A}$ та $\operatorname{ind}\mathscr{B}$. Дійсно, нехай $A \simeq \simeq \bigoplus_{j=1}^{t} n_j A_j$, де $A_j \in \operatorname{ind}\mathscr{A}$, $A_k \neq A_j$, якщо $k \neq j$, $B \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} m_i B_i$ — аналогічний розклад

B. Тоді $\mathscr{W}(A,B)$ можна ототожнити з множиною блочних матриць (W_{ij}), де W_{ij} — матриця розміру $m_i \times n_j$ з елементами з $\mathscr{W}(A_j, B_i)$. Аналогічно описуються морфізми між об'єктами з $\mathscr{A}$ і $\mathscr{B}$; при цьому їхня дія на елементи з $\mathscr{W}$ ототожнюється зі звичайним множенням матриць. Ми завжди будемо користуватися таким ототожненням. Саме тому бімодульну категорію ще звуть *категорією матриць над бімодулем.*

Важливим випадком є так звані *розділені бімодулі* (*bipartite*). Вони виникають в такий спосіб. Кожен $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-бімодуль $\mathscr{W}$ можна розглядати як бімодуль над прямим добутком $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, якщо покласти $\mathscr{W}((A,B),(A',B')) = \mathscr{W}(A,B')$. Тоді об'єкти з $\mathsf{El}(\mathscr{W})$ — це елементи з просторів $\mathscr{W}(A,B)$ $(A \in \operatorname{Ob}\mathscr{A},\ B \in \operatorname{Ob}\mathscr{B})$, а морфізм $f : v \to v'$, де $v \in \mathscr{V}(A,B)$, $v' \in \mathscr{V}(A',B')$ — це пара морфізмів (a,b), $a : A \to A'$, $b : B \to B'$, для якої $bv = v'a$. Найчастіше бімодулі, які виникають в теорії зображень, векторних розшарувань та в інших «зовнішніх» розглядах, є саме розділеними. Проте навіть тоді в перебігу обчислень неможливо обійтися без розгляду загального випадку (приклади ми побачимо в наступному розділі).

Розглянемо ситуацію з Розділу 3. Будемо користуватися позначеннями, введеними на сторінці

46. Позначимо через $\mathscr{A} = \mathsf{A}$-pro категорію скінченнопороджених проективних A-модулів (тобто прямих доданків вільних модулів скінченного рангу), $\mathscr{B} = \mathrm{VB}(\tilde{X})$ і $\mathscr{W}(\mathsf{F}, \mathcal{G}) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(\mathsf{F}, \mathcal{G}/\mathcal{J}\mathcal{G})$ (як і раніше, ми ототожнюємо $\mathcal{G}$ з пучком $\widetilde{\mathcal{O}}$-модулів $\pi_*\mathcal{G}$). Тоді $\mathscr{W} = \mathscr{W}_X$ стає розділеним бімодулем над $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$. Кожну трійку $\mathsf{T} = (\mathcal{G}, \mathsf{F}, \iota)$ з категорії $\mathscr{T}(X)$ можна ототожнити з об'єктом $\iota \in \mathscr{W}(\mathsf{F}, \mathcal{G})$ з категорії $\mathsf{El}(\mathscr{W})$. Більше того, це ототожнення визначає повне занурення $\mathscr{T}(X) \to \mathsf{El}(\mathscr{W})$. Будемо завжди ототожнювати $\mathscr{T}(X)$ з її образом при цьому зануренні й працювати з матричними зображеннями елементів бімодуля $\mathscr{W}$. Об'єкти з категорії $\mathsf{El}(\mathscr{W})$, ізоморфні образам трійок з $\mathscr{T}(X)$, назвемо *повними*. Згідно з зауваженням 3.2, об'єкт $\iota \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(\mathsf{F}, \mathcal{G}/\mathcal{J}\mathcal{G})$ є повним тоді й тільки тоді, коли F є вільним A-модулем, а відповідний гомоморфізм $\tilde{\iota} : \mathsf{B} \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{F} \to \mathcal{G}/\mathcal{J}\mathcal{G}$ є ізоморфізмом.

ПРИКЛАД 4.1 (**Проективні конфігурації**). Зв'язну проективну криву X назвемо *проективною конфігурацією*, якщо всі компоненти $X_1, X_2, \dots, X_s$ її нормалізації $\tilde{X}$ ізоморфні проективній прямій, а всі особливі точки x є *простими вузлами*, тобто $\pi^{-1}(x) = \{\, x', x'' \,\}$ є редукованим підмноговидом у $\tilde{X}$, який складається з двох точок. У цьому випадку $\mathcal{J}_x = \mathfrak{m}_x$ (максимальний ідеал кільця $\mathcal{O}_x$), $\mathsf{A}_x = \mathbb{k}(x)$, а $\mathsf{B}_x = \mathbb{k}(x') \times \mathbb{k}(x'')$, куди $\mathbb{k}(x)$ занурене діагонально. Тому $\operatorname{ind} \mathscr{A} = \{ \mathbb{k}(x) \mid x \in S \}$. З іншого боку, $\operatorname{ind} \mathscr{B}$ складається лише з «підкручених» розшарувань $\mathcal{O}_i(d)$: $\operatorname{ind} \mathscr{B} = \{ \mathcal{O}_i(d) \mid 1 \leqslant i \leqslant s,\ d \in \mathbb{Z} \}$, де $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{X_i}$. Крім того, $(\mathcal{O}_i(d)/\mathcal{J}\mathcal{O}_i(d))_x \simeq \mathbb{k}(x') \times \mathbb{k}(x'')$, оскільки підкрутка не впливає на хмарочоси. Отже, елементи бімодуля $\mathscr{W}$ ототожнюються з блочними матрицями W з блоками $W(i,d,y)$, де $1 \leqslant i \leqslant s$, $d \in \mathbb{Z}$, а $y \in X_i \cap \widetilde{S}$. Зручно вважати, що всі точки з $X_i \cap \widetilde{S}$ належать афінній частині $U_0 = \{ (\lambda : \mu) \mid \lambda \neq 0 \}$ проективної прямої $\mathbb{P}^1 \simeq X_i$, а тому їх можна розглядати як точки афінної прямої $\mathbb{A}^1$.

Очевидно, між різними об'єктами з $\operatorname{ind} \mathscr{A}$ морфізмів немає, а $\operatorname{End}(\mathbb{k}(x)) = \mathbb{k}$. Нехай $x' \in X_{i_1}$, $x'' \in X_{i_2}$ (можливо, $i_1 = i_2$, але $x' \neq x''$), $A = m\mathbb{k}(x)$, $A' = n\mathbb{k}(x)$, а морфізм $a : A' \to A$ задано $(m \times n)$-матрицею $\alpha = (a_{kl})$. Якщо W — елемент з $\mathscr{W}(A,B)$, то елемент Wa утворюється з W шляхом заміни матриць $W(i_1,d,x')$ і $W(i_2,d,x'')$ для всіх значень d на добутки $W(i_1,d,x')\alpha$ і $W(i_2,d,x'')\alpha$ відповідно.

З іншого боку, морфізмів $\mathcal{O}_i(d') \to \mathcal{O}_j(d)$ при $i \neq j$ або $d < d'$ немає, а $\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_i(d'), \mathcal{O}_i(d)) = \mathbb{k}[t]_{d-d'}$ при $d' \leqslant d$ (див. твердження 1.3). Зауважимо також, що

$$\mathcal{O}_i(d)/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_i(d) \simeq \mathcal{O}_i/\mathfrak{m}_y = \mathbb{k}(y).$$

Якщо $y \in U_0$, то морфізм $\mathcal{O}_i(d') \to \mathcal{O}_i(d)$, заданий многочленом $f(x)$, індукує на цих факторах множення на $f(y)$. Нехай $B = \bigoplus_d n_d \mathcal{O}_i(d)$, $B' = \bigoplus_d m_d \mathcal{O}_i(d)$, а морфізм $b : B \to B'$ задається блочною матрицею $(\beta_{dd'})$, де $\beta_{dd'}$ є матрицею розміру $m_d \times n_{d'}$, елементи якої належать $\Bbbk[t]_{d-d'}$ (нульовою, якщо $d < d'$). Тоді bW утворюється з W заміною кожної матриці $W(i,d,y)$, де $y \in X_i$, на $\sum_{d' \leqslant d} \beta_{dd'}(y) W(i,d',y)$.

Нагадаємо, що гомоморфізм ι з трійки $(\mathcal{G}, \mathsf{F}, \iota) \in \mathscr{T}(X)$ мусить індукувати ізоморфізм $\tilde{\iota} : \mathsf{B} \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{F} \to \mathsf{G}$ (див. зауваження 3.2). Пропонуємо читачеві самому перевірити, що ці умови виконуються тоді й тільки тоді, коли для кожної точки $y \in \widetilde{S}$ «великий y-блок»

$$W(y) = \begin{pmatrix} \vdots \\ W(i,-1,y) \\ W(i,0,y) \\ W(i,1,y) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

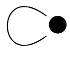
де $y \in X_i$, є оборотним. Якщо ι не є мономорфізмом, але $\tilde{\iota}$ є сюр'єкцію, прообраз $\operatorname{Im} \iota$ у $\mathcal{G}$ вже не є локально вільним, але залишається пучком без скруту. Більш того, можна показати, наслідуючи доведення сендвіч-теореми 3.1, що категорія когерентних пучків без скруту над X еквівалентна категорії трійок $(\mathcal{G}, \mathsf{F}, \iota)$, в яких $\tilde{\iota}$ є епіморфізмом (або, що те саме, $\mathsf{B}\operatorname{Im}\iota = \mathsf{G}$). Для відповідних матриць W це означає, що рядки кожного великого y-блоку лінійно незалежні. Деталі цього доведення залишаємо читатеві.

У наступних розділах ми скористаємося цими обчисленнями.

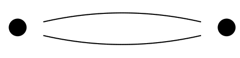
Для кожної проективної конфігурації визначимо її *граф перетинів* $\Delta(X)$ в такий спосіб:

- *Вершинами* графа $\Delta(X)$ є компоненти $X_1, X_2, \dots, X_s$ нормалізації $\tilde{X}$.
- *Ребрами графа* $\Delta(X)$ є особливі точки x кривої X.
- Ребро x інцидентне вершині X_i тоді й тільки тоді, коли $\pi^{-1}(x) \cap X_i \neq \emptyset$; зокрема, якщо $\pi^{-1}(x) \subset X_i$ для деякого i, то ребро x є насправді *петлею* у вершині X_i.

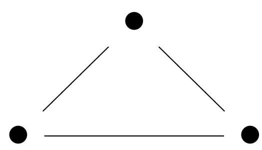
Наприклад, якщо X є виродженою (особливою) плоскою квадрикою, то вона складається з двох проективних прямих, які перетинаються трансверсально. Тому $\Delta(X)$ має дві вершини й одне ребро між ними. Якщо X є кубічною кривою з вузлом («*декартів лист*» або «*строфоїда*»), то $\Delta(X)$ має одну вершину з петлею в ній:



а якщо X складається з квадрики і прямої, яка не є дотичною до неї, то $\Delta(X)$ має вигляд



Нарешті, якщо X складається з трьох прямих, які попарно перетинаються (в різних точках), то $\Delta(X)$ має вигляд



Взагалі, якщо X складається з s прямих на площині, які перебувають у загальному положенні (тобто жодні 3 з них не перетинаються в одній точці), то $\Delta(X)$ є *повним графом* з s вершинами.

Розділ 5

В'язки ланцюгів

У цьому розділі розглянемо спеціальний клас бімодульних задач, а саме, так звані *в'язки ланцюгів* (див., наприклад, [**2**] або [**22**, Додаток B]). Їх буде використано в наступних двох розділах для опису векторних розшарувань над двома типами проективних конфігурацій. В'язки ланцюгів виникають також у багатьох інших питаннях, тому, на нашу думку, знайомство з ними буде корисним для широкого математичного загалу. Втім, якщо читач не бажає вдаватися в технічні деталі, ми пропонуємо йому або принаймні розібратися в результатах (опускаючи доведення), або прийняти на віру класифікацію векторних розшарувань у наступних розділах.

ОЗНАЧЕННЯ 5.1. *В'язкою ланцюгів* зветься набір

$$\big(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_n; \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n; \sim\big),$$

в якому:

- $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_n$ та $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n$ — диз'юнктні ланцюги (лінійно впорядковані множини без спільних елементів). Позначимо $\mathfrak{E} = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{E}_i$, $\mathfrak{F} = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{F}_i$ і $\mathfrak{A} = \mathfrak{E} \cup \mathfrak{F}$.

Елементи з $\mathfrak{A}$ будемо називати *літерами*, а множину $\mathfrak{A}$ — *алфавітом*.

- $\sim$ — таке відношення еквівалентності на множині $\mathfrak{A}$, що для кожного $a \in \mathfrak{A}$ множина $\{\, b \in \mathfrak{A} \mid a \sim b \,\}$ має щонайбільше 2 елементи. Клас еквівалентності елемента a позначимо через $\bar{a}$, а множину $\mathfrak{A}/\!\sim$ всіх класів еквівалентності — через $\mathfrak{B}$.

Ми також визначимо симетричне відношення $-$ на множині $\mathfrak{A}$, поклавши $e - f$ і $f - e$, якщо $e \in \mathfrak{E}_i$, $f \in \mathfrak{F}_i$ (з тим самим номером i).

ОЗНАЧЕННЯ 5.2. Визначимо категорію $\mathscr{A}_0$ і $\mathscr{A}_0$-бімодуль $\mathscr{W}_0$ в такий спосіб.

- $\operatorname{Ob} \mathscr{A}_0 = \mathfrak{B}$.
- Для кожної пари елементів a, b з одного ланцюга таких, що $a < b$, введемо новий символ α_{ba}.
- Для кожної пари $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{B}$ визначимо векторний простір $\bar{\mathscr{A}}(\bar{a}, \bar{b})$ як такий, що має базу
$$\{\, \alpha_{ba} \mid a \in \bar{a},\ b \in \bar{b},\ a < b \,\};$$
якщо таких пар немає, то $\bar{\mathscr{A}}(\bar{a}, \bar{b}) = 0$. Якщо $\bar{a} \neq \bar{b}$, то покладемо $\mathscr{A}_0(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{\mathscr{A}}(\bar{a}, \bar{b})$. Якщо ж $\bar{a} = \bar{b}$, то покладемо $\mathscr{A}_0(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{\mathscr{A}}(\bar{a}, \bar{b}) \oplus \Bbbk \cdot 1_{\bar{a}}$, де $1_{\bar{a}}$ — одиничний морфізм об'єкта $\bar{a}$.

- $\alpha_{cb}\alpha_{ba} = \alpha_{ca}$; всі інші добутки цих базисних елементів дорівнюють нулю.
- Для кожної пари елементів $e \in \mathfrak{E}_i$, $f \in \mathfrak{F}_i$ (з тим самим номером i) введемо новий символ γ_{ef}.
- Векторний простір $\mathscr{W}_0(a,b)$ має базу

$$\left\{ \gamma_{ef} \mid e \in \bar{b} \cap \mathfrak{E},\, f \in \bar{a} \cap \mathfrak{F},\, e - f \right\};$$

  якщо таких пар немає, то цей простір є нульовим.
- $\alpha_{e'e}\gamma_{ef} = \alpha_{e'f}$, якщо $e' < e$, і $\gamma_{ef}\alpha_{ff'} = \gamma_{ef'}$, якщо $f < f'$; всі інші можливі добутки базисних елементів нульові.

Визначимо категорію $\mathscr{A}$ як *адитивну оболонку* категорії $\mathscr{A}_0$. Її об'єкти — це формальні прямі суми $A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$ об'єктів з $\mathscr{A}_0$ (не обов'язково різних), а морфізми з такої суми до іншої формальної суми $B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_m$ — це $(m \times n)$-матриці (ϕ_{ij}), де $\phi_{ij} \in \mathscr{A}_0(A_j, B_i)$. Множення морфізмів визначається як добуток матриць. Розширимо $\mathscr{A}_0$-bimodule $\mathscr{W}_0$ до $\mathscr{A}$-бімодуля, який позначатимемо $\mathscr{W}$. Елементи з $\mathscr{W}(A,B)$ так само записуються матрицями, елементи яких належать до $\mathscr{W}_0(A_j, B_i)$. Бімодульна категорія $\mathsf{El}(\mathscr{W})$ і називається *категорією зображень даної в'язки ланцюгів*. Зауважимо, що якщо об'єкт A або об'єкт B, які є, за означенням, класами еквівалентності літер, складається з двох елементів, то самі елементи з $\mathscr{A}_0(A, B)$ зручно зображати як матриці з коефіцієнтами з поля $\Bbbk$: елементу ϕ відповідає матриця, яка складається з коефіцієнтів його розкладу за базисними елементами γ_{ef}. Наприклад, якщо $A = \{ f_1, f_2 \} \subseteq \mathfrak{F}_i$, а $B = \{ e_1, e_2 \} \subseteq \mathfrak{E}_i$, то елемент $\phi = \sum_{i,j} c_{ij}\gamma_{e_i f_j}$ будемо записувати як (2×2)-матрицю (c_{ij}). В інших випадках γ може зображуватись матрицею розміру 2×1 або 1×2 (поясніть, у яких випадках це можливо). У зв'язку з цим, об'єкт $A = \bigoplus_{i=1}^k A_i$ будемо записувати як послідовність літер: $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, де $\{ a_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n \} = \bigcup_{i=1}^k A_i$. Будемо казати, що літери $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *входять до* A. (Наприклад, якщо $A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$, де $A_1 = \{ a_1, a_2 \}$, $A_2 = \{ b \}$, $A_3 = \{ c_1, c_2 \}$, то будемо писати $A = (a_1, a_2, b, c_1, c_2)$). Тоді елемент з $\mathscr{A}(A, B)$, де $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, записується як матриця (c_{ij}) над полем $\Bbbk$, стовпчики якої пронумеровані тими елементами з $a_1, a_2, \ldots, a_n$, які належать $\mathfrak{F}$, а рядки — тими елементами з $b_1, b_2, \ldots, b_m$, які належать $\mathfrak{E}$. Скаляр c_{ij} є коефіцієнтом при $\gamma_{b_i a_j}$, якщо $b_i - a_j$, і є нулем в іншому випадку. Зручно вважати, що якщо $a_j \in A_i$, $a_{j'} \in A_{i'}$ і $i < i'$, то й $j < j'$. Найчастіше ми будемо припускати, що цю умову виконано. В такому разі матриці, які задають морфізми між об'єктами, будуть трикутними.

Якщо зібрати разом всі входження до A кожної літери, то елемент з $\mathsf{El}(\mathscr{W})$ можна розглядати як набір матриць $W(a,b)$ ($a \in \mathfrak{F}$, $b \in \mathfrak{E}$, $a - b$) розміру $n_b \times n_a$, причому $n_a = n_{a'}$, якщо $a \sim a'$. Елементи цих матриць — це коефіцієнти біля базисних елементів γ_{ba}. Два набори матриць задають ізоморфні об'єкти тоді й тільки тоді, коли один з них можна перетворити на другий за допомогою послідовності таких перетворень:

(1) Заміна $W(a,b)$ на $S_b^{-1}W(a,b)S_a$, де S_a — оборотні матриці, причому $S_a = S_{a'}$, якщо $a \sim a'$.
(2) Заміна $W(a,b)$ на $W(a,b)+W(a',b)S_{a'a}$ для деякого $a' > a$ і деякої матриці $S_{a'a}$.
(3) Заміна $W(a,b)$ на $W(a,b)+S_{bb'}W(a,b')$ для деякого $b' < b$ і деякої матриці $S_{bb'}$.

Зауважимо, що ми не накладаємо жодних зв'язків на матриці $S_{a'a}$ та $S_{bb'}$ з різними парами (a,a') або (b,b'), навіть якщо деякі з цих елементів еквівалентні.

Зручно зібрати всі $W(a,b)$ з $a \in \mathfrak{E}_i$, $b \in \mathfrak{F}_i$ (при фіксованому i) й записати їх в одну блочну матрицю, як це зображено на малюнку 1. Тут ми вважаємо, що $b_1 < b_2 < \dots < b_m$, $a_1 > a_2 > \dots > a_n$. Стрілки показують, що рядки зі смуг, розташованих вище, можна додавати до

Мал. 1

$$
\begin{pmatrix}
W(a_1,b_1) & W(a_2,b_1) & \dots & W(a_n,b_1)\\
W(a_1,b_2) & W(a_2,b_2) & \dots & W(a_n,b_2)\\
\dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\\
W(a_1,b_m) & W(a_2,b_m) & \dots & W(a_n,b_m)
\end{pmatrix},
$$

рядків зі смуг, розташованих нижче, а стовпчики зі смуг, розташованих лівіше, можна додавати до стовпчиків зі смуг, розташованих правіше. Дозволено також робити елементарні перетворення в кожній смузі, але перетворення в еквівалентних смугах повинні бути однаковими. Звісно, якщо одна з них є горизонтальною, а інша — вертикальною, «однакове» означає «контраґрадієнтне». Це відповідає тому, що в перетвореннях типу (1) праворуч стоїть матриця S_a, а ліворуч — S_b^{-1}.

Нерозкладні об’єкти категорії $\mathsf{El}(\mathscr{W})$ зручно описувати, користуючись деякою *комбінаторикою слів*. Дамо відповідні означення.

Означення 5.3. Нехай дано в’язку ланцюгів $\big(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_n; \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n; \sim\big)$. Будемо користуватися позначеннями з означень 5.1 і 5.2.

(1) *Словом* назвемо послідовність

$$w = a_1 r_1 a_2 r_2 \dots a_{n-1} r_{n-1} a_n, \tag{5.1}$$

де $a_i \in \mathfrak{A}$, $r_i \in \{\sim, -\}$, в якій $a_i r_i a_{i+1}$ в $\mathfrak{A}$, $r_i \neq r_{i+1}$ і $a_i \neq a_{i+1}$ для кожного $1 \leqslant i < n$. Таке слово зветься *повним*, якщо або $r_1 = \sim$, або ж $a_1 \not\sim b$ для всіх $b \neq a_1$ і так само або $r_{n-1} = \sim$, або ж $a_n \not\sim b$ для всіх $b \neq a_n$. Число n називається *довжиною* слова w і позначається через $n = l(w)$. *Обернене слово* w^* визначається як

$$w^* = a_n r_{n-1} a_{n-1} \dots r_2 a_2 r_1 a_1.$$

(2) Слово w зветься *циклічним*, якщо $r_1 = r_{n-1} = \sim$ і $a_n - a_1$ в $\mathfrak{A}$. Для такого циклічного слова позначимо $r_n = -$, $a_{i+n} = a_i$ і $r_{i+n} = r_i$ (наприклад, $a_{n+1} = a_1$, а $r_0 = r_n$) та визначимо його *циклічний зсув* $w^{(k)}$ як слово

$$w^{(k)} = a_{2k+1} r_{2k} a_{2k+2} \dots r_{2k-1} a_{2k},$$

де $0 \leqslant k < n/2$ (зауважимо, що довжина циклічного слова завжди парна). *Знак* $\delta(w,k)$ такого зсуву визначається як $(-1)^h$, де h — число таких індексів $0 \leqslant j < k$, що або $\{a_{2j+1}, a_{2j}\} \subseteq \mathfrak{E}$, або $\{a_{2j+1}, a_{2j}\} \subseteq \mathfrak{F}$. Циклічне слово w довжини n зветься *аперіодичним*, якщо $w^{(k)} \neq w$ при $0 < k < n/2$ (тоді якщо $w^{(k)} = w$, то k ділить $n/2$).

(3) Для кожного повного слова w (5.1) позначимо через $C(w)$ множину пар індексів (i, j)

таких, що $a_i \in \mathfrak{E}$, $a_j \in \mathfrak{F}$, причому або $j = i+1$ і $r_i = -$, або $i = j+1$ і $r_j = -$. Якщо слово w циклічне, позначимо через $c(w)$ пару $(1, n)$, якщо $a_1 \in \mathfrak{E}$, і пару $(n, 1)$, якщо $a_1 \in \mathfrak{F}$.

(4) Для кожного повного слова w (5.1), визначимо *низку* («*string*») як елемент

$$\mathbf{S}(w) \in \mathscr{W}(A, A),$$

де $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, заданий матрицею (σ_{ij}), в якій

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (i,j) \in C(w); \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

(5) Якщо дано *аперіодичне* циклічне слово w, додатне ціле число $m \in \mathbb{N}$ та ненульовий скаляр $\lambda \in \Bbbk$, визначимо *стрічку* («*band*») як елемент

$$\mathbf{B}(w, m, \lambda) \in \mathscr{W}(A, A),$$

де $A = m\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, заданий блочною матрицею (β_{ij}) $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, в якій

$$\beta_{ij} = \begin{cases} I_m, & \text{якщо } (i,j) \in C(w); \\ J_m(\lambda), & \text{якщо } (i,j) = c(w); \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тут I_m позначає одиничну $(m \times m)$-матрицю, а $J_m(\lambda)$ — жорданову клітину розміру $m \times m$ з власним числом λ:

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Припустимо, наприклад, що у нас є по одному ланцюгу

$$\mathfrak{E}_1 = \{\, b_1 < b_2 < b_3 \,\} \text{ та } \mathfrak{F}_1 = \{\, a_1 > a_2 > a_3 \,\}$$

,

причому $a_1 \sim b_1$, $b_2 \sim b_3$, $a_2 \sim a_3$. Тоді слову $w = b_1 \sim a_1 - b_3 \sim b_2 - a_1 \sim b_1 - a_3 \sim a_2$ відповідає низка

$$\mathbf{S}(w) = \begin{array}{|cc|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \tag{5.2}$$

(горизонтальні блоки відповідають літерам b_1, b_2, b_3, а вертикальні — літерам a_1, a_2, a_3). Якщо ж розглядати w як циклічне слово, то можна побудувати, наприклад, стрічку

$$
\mathbf{B}(w, 2, -1) = \begin{array}{|cccc|cc|cc|}
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & 0 & 0 \\
\cline{5-6}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array} \tag{5.3}
$$

(жирним шрифтом виділено жорданову клітину $J_2(-1)$, яка походить з блоку β_{18}).

Користуючись цими означеннями, сформулюємо основний результат про зображення в’язок ланцюгів.

Теорема 5.4. (1) *Низки й стрічки є нерозкладними об’єктами бімодульної категорії* $\mathsf{El}(\mathscr{W})$, *і кожен нерозкладний об’єкт цієї категорії ізоморфний деякій низці або стрічці.*

(2) *Жодна стрічка не є ізоморфною жодній низці.*

(3) $\mathbf{S}(w) \simeq \mathbf{S}(w')$ *тоді й тільки тоді, коли або* $w' = w$, *або* $w' = w^*$.

(4) $\mathbf{B}(w, m, \lambda) \simeq \mathbf{B}(w', m', \lambda')$ *тоді й тільки тоді, коли або* $w' = w^{(k)}$, *або ж* $w' = w^{*(k)}$ *для деякого* $0 \leqslant k < l(w)/2$, *причому* $m = m'$, *а* $\lambda' = \lambda^{\delta(w,k)}$.

ДОВЕДЕННЯ. Доведення базується на *алгоритмі зведення* для зображень в'язок ланцюгів. Саме, на кожному кроці ми зводимо до деякої нормальної форми один блок $W(a, b)$ з матричного зображення елемента з $\mathsf{El}(\mathscr{W})$ і надалі розглядаємо лише елементи, в яких цей блок має задану нормальну форму. Потім встановлюємо, що підкатегорія таких елементів еквівалентна повній підкатегорії в $\mathsf{El}(\mathscr{W}')$, де $\mathscr{W}'$ знову є бімодулем, який відповідає деякій (новій) в'язки ланцюгів. Після цього доведення завершує проста індукція.

Спочатку впорядкуємо трійки (i, a, b), в яких $a \in \mathfrak{E}_i$, $b \in \mathfrak{F}_i$: $(i, a, b) < (i', a', b')$, якщо або $i < i'$, або $i = i'$, $a > a'$ (зверніть увагу на знак нерівності!), або $i = i'$, $a = a'$ і $b < b'$. Позначимо через $\mathsf{El}[i, a, b]$ повну підкатегорію в $\mathsf{El}(\mathscr{W})$, яка складається з усіх елементів, що записуються як блочні матриці W такі, що $W(a', b') = 0$ для всіх трійок $(i', a', b') < (i, a, b)$. Наприклад, низка з формули (5.2) і стрічка з формули (5.3) належать $\mathsf{El}[1, a_1, b_2]$.

Можливі два випадки в залежності від того, чи елементи a та b еквівалентні між собою. Розглянемо, як працює алгоритм редукції в кожному з них.

Випадок 1. $a \not\sim b$.

В цьому випадку з матрицею $W(a,b)$ можна робити будь-які елементарні перетворення (вони є перетвореннями типу (1), визначеними вище). Тому її можна звести до діагонального вигляду $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, де I — одинична матриця. Оскільки $a > a'$, а якщо $a = a'$, то $b < b'$ для всіх ненульових матриць $W(a',b')$ з $a' \in \mathfrak{F}_i$, $b' \in \mathfrak{E}_i$, то перетвореннями типів (2–3) можна зробити нульовими всі рядки та стовпчики цих матриць, однойменні з тими рядками й стовпчиками матриці $W(a,b)$, в яких стоять одиничні елементи. Після цього весь i-ий блок набуває вигляду:

$$\begin{array}{|cc|ccc|} \hline I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ \hline 0 & * & & & \\ \vdots & * & & & \\ 0 & * & & & \\ \hline \end{array}$$

Позначимо через $W'(a,f)$ і $W'(e,b)$ блоки, які помічені зірочками, і покладемо $W'(a,b) = 0$. Якщо $a \not\sim a'$ і $b \not\sim b'$ для всіх $a' \neq a$ і $b' \neq b$, то W має прямі доданки вигляду $\gamma_{ab} \in \mathscr{W}(a,b)$

(вони є *низками* $\mathbf{S}(a{-}b)$). Якщо ж $a \sim a'$, $a' \neq a$, або $b \sim b'$, $b' \neq b$, або і те й інше, то до ланцюгів, які містять, відповідно, a' і b', додамо нові елементи, відповідно, $[a'b]$ або (та) $[ab']$, вважаючи, що $a' > [a'b] > a''$ для всіх $a'' < a'$, $b' < [ab'] < b''$ для всіх $b'' > b'$, і $[ab'] \sim [ba']$, якщо обидва ці елементи визначені. Якщо, наприклад, $a' \in \mathfrak{E}$, позначимо через $W'(a', f)$ і $W'([a'b], f)$ ті частини блока $W(a', f)$, які є однойменними, відповідно, до нульових і ненульових стовпчиків матриці $W(a, b)$. В інших можливих випадках розташування елементів a' і b' ми введемо аналогічні позначення для відповідних частин блоків. Наприклад, якщо існують і a', і b', причому $a' \in \mathfrak{E}$, $b' \in \mathfrak{F}$ і $a' - b'$, то блок $W(b', a')$ розіб’ється на 4 частини:

$$\Bigg\downarrow \overrightarrow{\begin{pmatrix} W'([ab'], [a'b]) & W'(b', [a'b]) \\ W'([ab'], a') & W(b', a') \end{pmatrix}},$$

причому перетворення з цими блоками можливі, як показано стрілками, зліва направо і зверху вниз. Таким чином, ми дійсно отримали нову в’язку ланцюгів, тобто новий бімодуль $\mathscr{W}'$ разом з відображенням $\mathsf{El}[i, a, b] \to \mathsf{El}(\mathscr{W}')$. Легко перевірити, що це відображення розповсюджується на морфізми, отже, ми отримуємо функтор $\rho : \mathsf{El}[i, a, b] \to \mathsf{El}(\mathscr{W}')$, образ якого належить до $\mathsf{El}[i_1, a_1, b_1]$ для деякої трійки $(i_1, a_1, b_1) > (i, a, b)$.

Більше того, природно визначається й функтор $\mathsf{El}[i_1, a_1, b_1] \to \mathsf{El}[i, a, b]$: ми просто об'єднуємо рядки чи стовпчики з номерами a' і $[a'b]$, b' і $[ab']$ та відновлюємо матрицю $W(a, b)$ так, щоб $\rho\rho'(W') = W'$ і $\rho'\rho(W) = W$, якщо останній об'єкт не мав прямих доданків вигляду γ_{ab}. Існує й відповідність між *словами*. Саме, якщо $b \not\sim b'$ для всіх $b' \neq b$, то в кожному слові w треба замінити всі входження підслів $a' \sim a - b$ або $b - a \sim a'$ на $[a'b]$; аналогічну процедуру треба застосувати до a, якщо $a \not\sim a'$ для всіх $a' \neq a$. Якщо ж і $a \sim a'$, і $b \sim b'$, то треба замінити всі підслова $a' \sim a - b \sim b'$ та $b' \sim b - a \sim a'$, відповідно, на $[a'b] \sim [ab']$ або $[ab'] \sim [a'b]$. Якщо слово w циклічне, цю процедуру слід застосувати також до всіх його циклічних зсувів. Нескладно перевірити, що ці процедури узгоджені з конструкціями низок і стрічок. Ми залишаємо деталі читачеві.

Випадок 2. $a \sim b$.

В цьому випадку перетворення типу (1) у застосуванні до матриці $W(a, b)$ дають лише перетворення *подібності*: $W(a, b) \mapsto S_a^{-1} W(a, b) S_a$. Тому цю матрицю можна звести до прямої суми жорданових клітин $J_m(\lambda)$. За допомогою перетворень типів (2–3) всі клітини $J_m(\lambda)$, в яких $\lambda \neq 0$, можна вилучити як прямі доданки W

(вони є *стрічками* $\mathbf{B}(a \sim b, m, \lambda)$). Отже, надалі можна обмежитись випадком, коли $W(a,b)$ є прямою сумою клітин з власним числом 0, тобто зводиться до наступного вигляду:

$$W(a,b) = \begin{array}{|c|ccc|ccc|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \hline \end{array}$$

За допомогою перетворень типів (2–3) можна зробити нульовими (поза $W(a,b)$) всі ті рядки й стовпчики, в яких $W(a,b)$ має ненульові елементи, тобто звести i-ту частину W до вигляду:

$$\begin{array}{|c|cc|ccc|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ \hline 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline * & * & 0 & * & 0 & 0 & \dots & * \\ \hline \end{array}.$$

Виключимо a і b з ланцюгів $\mathfrak{E}_i$ та $\mathfrak{F}_i$, додавши до них натомість нові елементи a_m та b_m ($m \in \mathbb{N}$), для яких $a_m > a_k$ і $b_m < b_k$ при $k < m$ (тобто додавати можна «від більших жорданових клітин до менших»). При цьому всі інші нерівності між a_m та $a' \neq a$ (b_m та $b' \neq b$) залишаються такими самими, як між a та a' (b та b'). Покладемо також $a_m \sim b_m$. Одержимо нову в'язку ланцюгів, тобто новий бімодуль $\mathscr{W}'$. Позначимо через $W'(a_m, e)$ та $W'(f, b_m)$ ті частини матриць $W(a, e)$ та $W(f, b)$, які відповідають нульовим стовпчикам та рядкам m-вимірних жорданових клітин з $W(a, b)$ (на малюнку вони позначені зірочками). Можна переконатися, що в такий спосіб ми отримуємо функтор $\rho : \mathsf{El}[i, a, b] \to \mathsf{El}(\mathscr{W}')$, образ якого належить до $\mathsf{El}[i', a', b']$, де $(i, a, b) < (i', a', b')$. Очевидно, можна визначити й функтор $\rho' : \mathsf{El}[i', a', b'] \to \mathsf{El}[i, a, b]$ в такий спосіб, щоб $\rho\rho'(W') = W'$, а W могло відрізнятися від $\rho'\rho(W)$ лише прямим доданками вигляду $J_m(\lambda)\gamma_{ab}$, де $\lambda \neq 0$. Так само встановлюється і відповідність між словами, узгоджена з конструкцією низок і стрічок. А саме, у кожному слові w треба замінити кожне підслово вигляду $a \sim b - a \sim b - \ldots a \sim \sim b$ або $b \sim a - b \sim a - \ldots b \sim a$, де $a \sim b$ або $b \sim a$ зустрічається m разів, на слово $a_m \sim b_m$ або $b_m \sim a_m$ відповідно. Якщо слово w циклічне, то цю процедуру треба застосувати також до всіх його циклічних зсувів. Ми пропонуємо читачеві самому прослідкувати за деталями.

Оскільки на кожному кроці ми зменшували розмір матриць, тепер очевидна індукція завершує доведення. □

Пропонуємо читачеві розібрати наступний приклад, який часто зустрічається й відіграє істотну роль у різних питаннях теорії зображень. Цей приклад також є основою для узагальнення результатів цього розділу на більш широкий клас матричних задач — *в'язки напівланцюгів* [**2**].

Вправа 5.5. Нехай Q — сагайдак (орієнтований граф)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & 2 \arrow[d, "c"] \\ 3 \arrow[r, "d"'] & 4 \end{tikzcd}$$

Нагадаємо, що *зображенням* цього сагайдака називається діаграма векторних просторів і лінійних відображень наступного вигляду:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"'] & V_2 \arrow[d, "C"] \\ V_3 \arrow[r, "D"'] & V_4 \end{tikzcd}$$

Дві такі діаграми визначають *еквівалентні зображення*, якщо вони відрізняються на автоморфізми векторних просторів V_i.

Побудуйте таку в’язку ланцюгів, категорія зображень якої еквівалентна категорії зображень цього сагайдака. Користуючись цим, опишіть всі нерозкладні зображення сагайдака Q.

Розділ 6

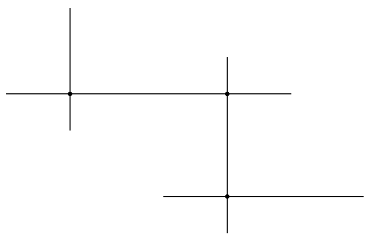
Легкий випадок: A-конфігурації

Застосуємо техніку, розвинену в розділах 4 та 5 для опису векторних розшарувань над спеціальними типами проективних конфігурацій, коли граф перетинів — ланцюг або цикл.

Найпростіший приклад проективних конфігурацій — це *конфігурації типу* A, коли граф перетинів $\Delta(X)$ — ланцюг (граф типу A_s):

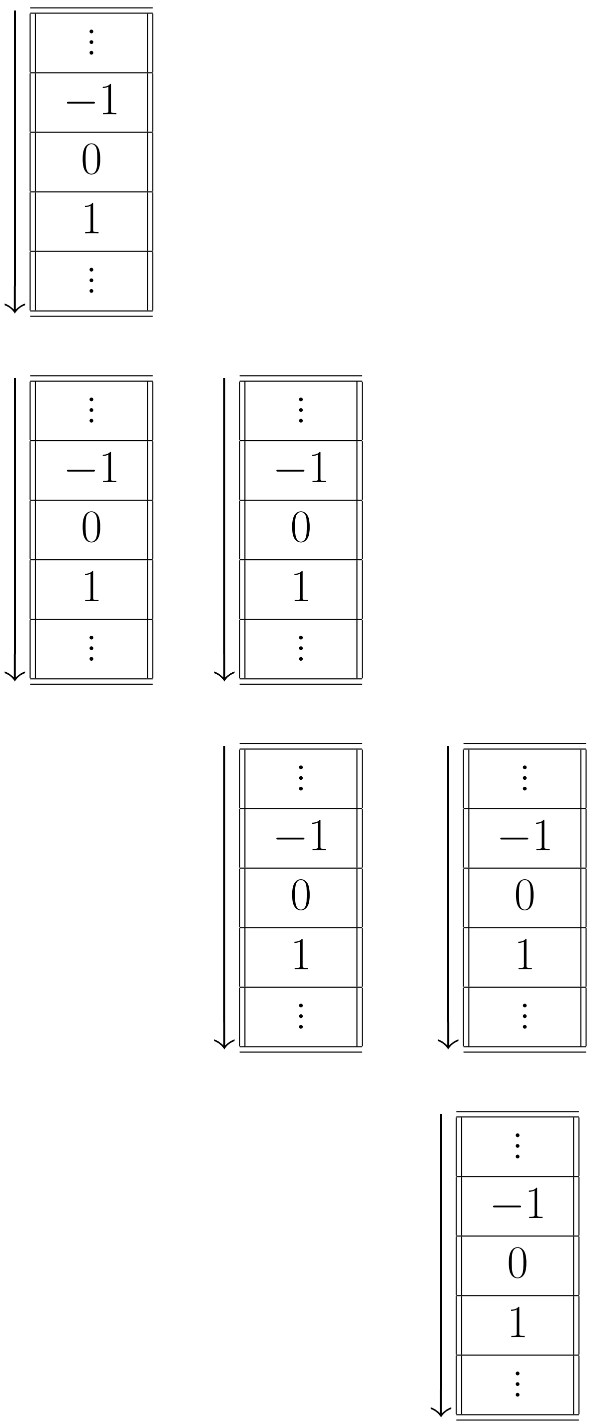
$$\bullet - \bullet - \cdots - \bullet$$

При $s = 4$ така конфігурація має вигляд



У цьому випадку множина S складається з $s-1$ точки: $S = \{\, x_1, x_2, \dots, x_{s-1} \,\}$, причому можна вважати, що $x_i' \in X_i$, а $x_i'' \in X_{i+1}$ $(1 \leqslant i < s)$. Тоді матриці $W(i, d, y)$ зручно записувати так, як це показано на малюнку 2 (при $s = 4$). Тут блоки відповідають матрицям $W(i, d, y)$ (значення d вписані всередину блоків). Блоки з однаковими

Мал. 2



значеннями i та y утворюють великий блок, виділений подвійними лініями; блоки з однаковими значеннями i та d утворюють спільну горизонтальну полосу; блоки з $y \in \{ x', x'' \}$ для фіксованої особливої точки x утворюють спільну вертикальну полосу. Стрілки показують, що морфізми можуть додавати «вищі» блоки до «нижчих», але не навпаки (це випливає з формули для aW, наведеної наприкінці прикладу 4.1). Зауважимо, що множина $\widetilde{S} \cap X_i$ містить щонайбільше 2 точки y_1, y_2, а для кожного $k > 0$ існує многочлен $f(t) \in \Bbbk[t]_k$ з довільними наперед заданими значеннями $f(y_1)$ та $f(y_2)$. Тому «вертикальні» додавання між полосами в різних великих блоках незалежні. Звідси випливає, що два набори матриць визначають ізоморфні об'єкти категорії $\mathsf{El}(\mathscr{W})$ тоді й тільки тоді, коли один з них можна перетворити на інший послідовністю таких перетворень:

(1) Елементарні перетворення всередині кожної горизонтальної або вертикальної полоси (однакові для всіх блоків з обраної полоси).
(2) Додавання деякого кратного рядка з «вищого» блоку до рядка з «нижчого» блоку (всередині того ж самого великого блоку).

Очевидно, такий бімодуль описується в'язкою ланцюгів. Саме, ми маємо пари ланцюгів $\mathfrak{E}_i =$

$= \{\, e_{id} \mid d \in \mathbb{Z} \,\}$, $\mathfrak{F}_i = \{\, f_i \,\}$ та $\mathfrak{E}'_i = \{\, e'_{id} \mid d \in \mathbb{Z} \,\}$, $\mathfrak{F}'_i = \{\, f'_i \,\}$, де $1 \leqslant i \leqslant s$. Порядок у $\mathfrak{E}_i$ та $\mathfrak{E}'_i$ визначається звичайним упорядкуванням других індексів як цілих чисел. Ланцюги $\mathfrak{E}_i$ та $\mathfrak{F}_i$ відповідають блокам $W(i, x'_i, d)$, а ланцюги $\mathfrak{E}'_i$ та $\mathfrak{F}'_i$ — блокам $W(i+1, x''_i, d)$. Відношення еквівалентності $\sim$ визначається правилами: $e_{id} \sim e'_{i-1,d}$ $(1 < i \leqslant s,\ d \in \mathbb{Z})$ і $f_i \sim f'_i$. Зауважимо, що в цьому випадку не існує жодного циклічного слова; крім того, в кожному слові зустрічається не більше, ніж одна літера з кожного з ланцюгів $\mathfrak{E}_i$ або $\mathfrak{F}_j$. Тому всі можливі повні слова є підсловами слів вигляду

$$\begin{aligned} (6.1)\quad e_{1d_1} - f_1 \sim f'_1 - e'_{1d_2} \sim e_{2d_2} - \\ - f_2 \sim f'_2 - \dots - f_s \sim f'_s - e'_{sd_s}. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо такий опис нерозкладних об'єктів у категорії $\mathsf{El}(\mathscr{W})$.

Теорема 6.1. *Нехай X — проективна конфігурація типу A_s. Виберемо цілі числа k, l, d_i $(1 \leqslant k \leqslant i \leqslant l \leqslant s)$, покладемо $\mathcal{G} = \bigoplus_{i=k}^{l} \mathcal{O}_i(d_i)$, $\mathsf{F} = \bigoplus_{i=k}^{l-1} \Bbbk(x_i)$ і позначимо через $\iota(d_k, \dots, d_l)$ об'єкт з $\mathscr{W}(\mathsf{F}, \mathcal{G})$, який відображає кожен доданок $\Bbbk(x_i)$ у $\Bbbk(x'_i) \times \Bbbk(x''_i)$ діагонально. Тоді $\iota(d_k, \dots, d_l)$ — нерозкладні, попарно неізоморфні об'єкти категорії $\mathsf{El}(\mathscr{W})$ і кожен нерозкладний об'єкт цієї категорії ізоморфний одному з них. Такий об'єкт*

$\iota(d_k, \dots, d_l)$ належить підкатегорії $\mathscr{T}(X)$ тоді й тільки тоді, коли $k = 1$ і $l = s$.

Позначимо через $\mathcal{L}\,(d_1, d_2, \dots, d_s)$ векторне розшарування, яке відповідає об'єкту $\iota(d_1, d_2, \dots, d_s)$. Слід відзначити, що це — лінійне розшарування. Зокрема, $\mathcal{O}_X \simeq \simeq \mathcal{L}(0, 0, \dots, 0)$.

Наслідок 6.2. *Кожне векторне розшарування над проективною конфігурацією типу* A_s *однозначно розкладається у пряму суму лінійних розшарувань* $\mathcal{L}\,(d_1, d_2, \dots, d_s)$*. Ці лінійні розшарування попарно неізоморфні.*

Цей опис дозволяє встановити властивості векторних розшарувань. Наприклад, можна обчислити їх когомології. Для цього введемо додаткові означення.

Означення 6.3. (1) *Додатною частиною* послідовності цілих чисел $\mathbf{d}=(d_1, d_2, \dots, d_s)$ назвемо таку її підпослідовність $\mathbf{d}' = (d_{k+1}, d_{k+2}, \dots, d_{k+l})$ $(0 \leqslant k < s,\ 1 \leqslant l \leqslant s-k)$, що $d_{k+i} \geqslant 0$ при $1 \leqslant i \leqslant l$, але $d_k < 0$, якщо $k > 0$, і $d_{k+l+1} < 0$, якщо $l < s-k$.

(2) *Ефективну довжину* $L(\mathbf{d}')$ додатної частини визначимо в такий спосіб:

$$L(\mathbf{d}') = \begin{cases} l+1, & \text{якщо } d_{k+i} > 0 \text{ для деякого } i \\ & \text{де } 1 \leqslant i \leqslant l,\ k+i \notin \{\,1, s\,\}\,; \\ l & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Для кожного цілого числа a ми також позначимо $a^+ = (|a| + a)/2$ і $a^- = (|a| - a)/2$.

Твердження 6.4. *Нехай* $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d_1, d_2, \dots, d_s)$, $\mathbf{P}$ *— множина додатних частин послідовності* $(d_1, d_2, \dots, d_s)$. *Тоді*

$$\mathrm{h}^0(\mathcal{L}) = \sum_{i=1}^{s}(d_i + 1)^+ - \sum_{\mathbf{d}' \in \mathbf{P}} L(\mathbf{d}'),$$

$$\mathrm{h}^1(\mathcal{L}) = \sum_{i=1}^{s}(d_i + 1)^- + (s - 1) - \sum_{\mathbf{d}' \in \mathbf{P}} L(\mathbf{d}').$$

Доведення. Розглянемо точну послідовність

$$0 \to \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{S} \to 0,$$

де $\mathcal{S} = \widetilde{\mathcal{L}}/\mathcal{L}$. З неї одержуємо точну послідовність когомологій

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{H}^0(\mathcal{L}) \to \mathrm{H}^0(\widetilde{\mathcal{L}}) \xrightarrow{\sigma_*} \mathrm{H}^0(\mathcal{S}) \to \\ \to \mathrm{H}^1(\mathcal{L}) \to \mathrm{H}^1(\widetilde{\mathcal{L}}) \to 0, \end{aligned}$$

оскільки $\mathcal{S}$ — хмарочос, а тому $\mathrm{H}^1(\mathcal{S}) = 0$. Звідси випливає, що $\mathrm{h}^0(\mathcal{L}) = \mathrm{h}^0(\widetilde{\mathcal{L}}) - \dim \operatorname{Im} \sigma_*$, а $\mathrm{h}^1(\mathcal{L}) = \mathrm{h}^0(\widetilde{\mathcal{L}}) + {} + \mathrm{h}^0(\mathcal{S}) - \dim \operatorname{Im} \sigma_*$. Ми знаємо, що $\mathrm{h}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) = (d + 1)^+$, а $\mathrm{h}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) = (d + 1)^-$ (вправа 1.4). Отже, $\mathrm{h}^0(\widetilde{\mathcal{L}}) = \sum_{i=1}^{s}(d_i + 1)^+$, а $\mathrm{h}^1(\widetilde{\mathcal{L}}) = \sum_{i=1}^{s}(d_i + 1)^-$. Більше того, $\mathrm{H}^0(\mathcal{S}) \simeq \simeq \bigoplus_{x \in S} \mathcal{S}_x \simeq \bigoplus_{i=1}^{s-1}(\Bbbk(x_i') \times \Bbbk(x_i''))/\Bbbk(x_i)$, тому $\mathrm{h}^0(\mathcal{S}) = \#(S) = s - 1$. Нехай v_i' і v_i'' — образи в $\mathrm{H}^0(\mathcal{S})$ одиничних елементів з $\Bbbk(x_i')$ і $\Bbbk(x_i'')$. Тоді $v_i' = -v_i''$ при $0 < i < s$. Ми також покладемо $v_0'' = v_s' = 0$. Позначимо через σ_i обмеження σ_* на $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_i(d_i))$. Якщо $d_i < 0$, то $\sigma_i = 0$. Якщо $d_i = 0$, то $\operatorname{Im}\sigma_i$ породжений елементами $v_i' + v_{i-1}''$. Якщо ж $d_i > 0$, то $\operatorname{Im}\sigma_i$ породжений елементами v_i' і v_{i-1}'' при $i \notin \{1, s\}$, v_1' при $i = 1$ і v_{s-1}'' при $i = s$. Звідси випливає, що $\dim \operatorname{Im}\sigma_* = \sum_{\mathbf{d}'\in\mathbf{P}} L(\mathbf{d}')$. Це й доводить твердження. $\square$

Вправа 6.5. Нехай $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}(\mathbf{d}_k)$, $k = 1, 2$. Доведіть, що

(1) $\mathcal{L}_1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{L}_2 \simeq \mathcal{L}(\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2)$.
(2) $\mathscr{H}om_X(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \simeq \mathcal{L}(\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1)$.

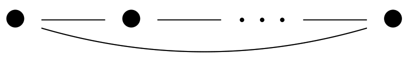
Вправа 6.6.
- Користуючись міркуваннями про когерентні пучки без скруту зі сторінки 58, покажіть, що кожен нерозкладний когерентний пучок без скруту над проективною конфігурацією X типу A_s ізоморфний одному з пучків $(i_{kl})_*\mathcal{L}$, де i_{kl} — занурення в X об'єднання компонент $X_{kl} = \pi(\bigcup_{i=k}^{l} X_i)$, а $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d_k, d_{k+1}, \ldots, d_l)$ — векторне розшарування над X_{kl}.
- Обчисліть когомології цих пучків.

Порада: Для обчислення когомологій скористайтеся тим, що i_{kl}, як кожне замкнене занурення, є *афінним морфізмом*, а тому $\mathrm{H}^i(X, (i_{kl})_*\mathcal{L}) \simeq \mathrm{H}^i(X_{kl}, \mathcal{L})$ [**9**, Упражнение III.4.1].

Розділ 7

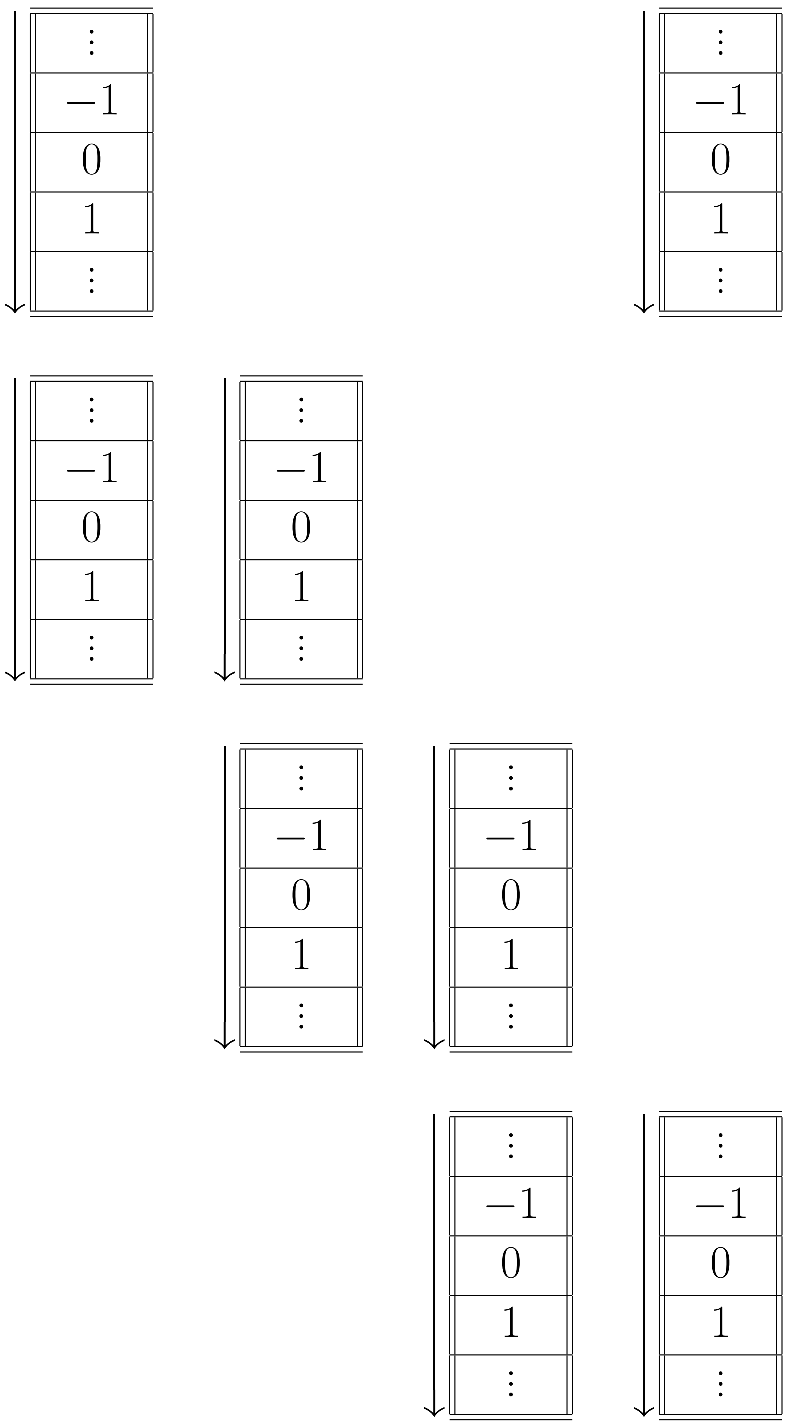
$\widetilde{\mathrm{A}}$-конфігурації

Розглянемо тепер випадок проективних конфігурацій X *типу* $\widetilde{\mathrm{A}}$, коли граф перетинів є циклом (графом типу $\widetilde{\mathrm{A}}_s$):



Тоді можна вважати, що $S = \{ x_1, x_2, \dots, x_s \}$, $x'_i \in X_i$, $x''_i \in X_{i+1}$, де ми вважаємо, що $X_{s+i} = X_i$ і $x_{s+i} = x_i$, зокрема, $X_{s+1} = X_1$. У цьому випадку зручно записувати матриці $W(i, d, x)$, як показано на малюнку 3 (теж для $s = 4$) з тими самими позначеннями й домовленостями, що й у попередньому розділі. Зокрема, ізоморфізми об'єктів з $\mathsf{El}(\mathscr{W})$ відповідають тим самим перетворенням (1–2) зі сторінки 81. В результаті знову отримуємо задачу про в'язки ланцюгів $\mathfrak{E}_i = \{ e_{id} \mid d \in \mathbb{Z} \}$, $\mathfrak{F}_i = \{ f_i \}$ та $\mathfrak{E}'_i = \{ e'_{id} \mid d \in \mathbb{Z} \}$, $\mathfrak{F}'_i = \{ f_i \}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, з відношенням еквівалентності $e_{id} \sim e'_{i-1,d}$ і $f_i \sim f'_i$. (Тут ми також замінюємо $s + i$ на i, зокрема, 0 на s і $s + 1$ на 1). Зауважимо, що цього разу кожне повне слово починається виразом $a \sim b$ для деяких літер a, b, оскільки кожна літера має еквівалентну їй. Тоді

Мал. 3



низка, визначена таким словом, обов'язково має нульовий рядок або стовпчик (який відповідає літері a), а тому не може відповідати жодному векторному розшаруванню. Отже, всі векторні розшарування походять зі стрічок.

Легко бачити, що, з точністю до взяття оберненого слова та циклічного зсуву, кожне циклічне слово має вигляд:

$$\begin{aligned} e'_{rs,d_1} \sim e_{1d_1} - f_1 \sim f'_1 - e'_{2d_2} \sim e_{2d_2} - f_2 \sim \\ \sim f'_2 - \dots - e'_{rs-1,d_{rs}} \sim e_{rs,d_{rs}} - f_{rs} \sim f_{rs}, \end{aligned}$$

тобто задається послідовністю чисел $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_{rs})$. Ця послідовність має довжину, кратну s і визначається з точністю до *циклічного s-зсуву*: $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_{rs}) \mapsto \mathbf{d}^{(ks)} = (d_{ks+1}, d_{ks+2}, \dots, d_{ks})$. Крім того, вона мусить також бути *аперіодичною*; це означає, що $\mathbf{d} \neq \mathbf{d}^{(ks)}$ при $0 < k < r$. Звідси випливає опис векторних розшарувань над кривою X.

Теорема 7.1. (1) *Будь-яке нерозкладне векторне розшарування над проективною конфігурацією X типу $\widetilde{\mathrm{A}}_s$ визначається трійкою $(\mathbf{d}, m, \lambda)$, де $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_{rs})$ — така послідовність цілих чисел, що $\mathbf{d} \neq \mathbf{d}^{(ks)}$ при $0 < k < r$, $m \in \mathbb{N}$, а $\lambda \in \Bbbk^\times$.*

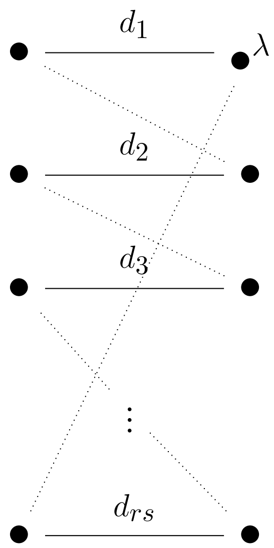
Позначимо відповідне векторне розшарування через $\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$. Очевидно, його ранг дорівнює mr, а степінь — $m\sum_{i=1}^{rs} d_i$. Якщо $\deg_k \mathcal{B}$ — степінь *обмеження* розшарування $\mathcal{B}$ на k-ту компоненту кривої X, то $\deg_k \mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda) = m\sum_{i\equiv k \pmod s} d_i$.

(2) *$\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda) \simeq \mathcal{B}(\mathbf{d}', m', \lambda')$ тоді й тільки тоді, коли $m = m'$, $\lambda' = \lambda$ і $\mathbf{d}'$ є циклічним s-зсувом $\mathbf{d}$: $\mathbf{d}' = \mathbf{d}^{(ks)}$ для деякого k.*

Зауважимо, що $\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{B}(\bar{0}, 1, 1)$, де $\bar{0}$ позначає послідовність $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{s \text{ разів}})$.

Будову цих векторних розшарувань можна проілюструвати досить простими малюнками. Нехай спочатку $m = 1$. Розшарування $\mathcal{B}(\mathbf{d}, 1, \lambda)$ «клеїться» з лінійних розшарувань на компонентах X_i, як показано на малюнку 4. На ньому i-та горизонтальна лінія символізує лінійне розшарування над X_i степеня, вказаного над цією лінією, її лівий і правий кінці відповідають базисним елементам цього розшарування в точках x_i' та x_{i-1}'', а пунктирні лінії показують, які з них клеяться. Всі ці склеювання тривіальні, за винятком того, яке сполучає найвищу праву точку з найнижчою лівою, де ми ототожнюємо один вектор з другим, помноженим на λ. Якщо ж $m > 1$, то треба взяти по m копій кожного з цих лінійних розшарувань, знову визначити всі склеювання, як тривіальні (перший вектор з першим, другий

Мал. 4



з другим, тощо), крім останнього, коли ототожнення «підкручується» за допомогою жорданової клітини $J_m(\lambda)$, тобто якщо $u_1, u_2, \dots, u_m$ — базисні вектори відповідних копій першого розшарування, а $v_1, v_2, \dots, v_m$ — останнього, то u_1 ототожнюється з λv_1, u_2 — з $\lambda v_2 + v_1$, …, u_m — з $\lambda v_m + v_{m-1}$.

Цього разу ми одержуємо нерозкладні векторні розшарування довільного рангу. Більше того, якщо фіксувати «дискретні параметри» $\mathbf{d}$ та m, то векторні розшарування $\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$ утворюють однопараметричну сім'ю з базою $\Bbbk^\times = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$. Зауважимо, що при фіксованих рангу й степеню таких сімей буде безліч. Дійсно, ми можемо в послідовності $(d_1, d_2, \dots, d_{rs})$ замінити, скажімо,

d_1 на $d_1 + k$, а d_{s+1} — на $d_{s+1} - k$, не змінивши ані рангу, ані степеня. При цьому не змінюються навіть степені $\deg_k \mathcal{B}$ обмежень розшарування $\mathcal{B}$ на компоненти X_k кривої X. Втім, подібні зміни цілком аналогічні «підкрутці» когерентних пучків на проективних многовидах. Дійсно, розглянемо *лінійні розшарування* вигляду $\mathcal{L}(\ell) = \mathcal{B}(\ell, 1, 1)$, де $\ell = (l_1, l_2, \dots, l_s)$. Тоді

$$\mathcal{L}(\ell) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda) \simeq \mathcal{B}(\mathbf{d} + \ell^r, m, \lambda), \text{ де}$$
$$\ell^r = (\underbrace{l_1, l_2, \dots, l_s, l_1, l_2, \dots, l_s, \dots, l_1, l_2, \dots, l_s}_{r \text{ разів}}).$$

Це розшарування, які одержуються з тривіального підкруткою на d_k на кожній компоненті X_k. Поклавши $l_k = -\min \{ d_i \mid i \equiv k \pmod{s} \}$, ми отримаємо послідовність $\mathbf{d} + \ell^r$, в якій всі компоненти невід'ємні. Очевидно, що таких послідовностей при фіксованому рангу й степеню є лише скінченна кількість. Отже, всі наші однопараметричні сім'ї одержуються із скінченної їх кількості підкрутками на компонентах. Зауважимо також, що якщо покласти $l_k = -\lfloor \deg_k \mathcal{B}/mr \rfloor$, то для підкрученого пучка $\mathcal{B}'$ матимемо нерівності $0 \leqslant \deg_k \mathcal{B}' < mr = \operatorname{rk} \mathcal{B}'$.

Знов-таки, з цього явного опису можна отримувати інформацію про властивості векторних розшарувань, наприклад, обчислити їх когомології. Оскільки ці обчислення цілком аналогічні тим, які ми використали при доведенні твердження 6.4, залишаємо їх як вправу для читача.

Вправа 7.2. Для довільної послідовності цілих чисел $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ визначимо її *циклічну додатну частину*, як таку підпослідовність $\mathbf{d}' = = (d_{k+1}, d_{k+2}, \dots, d_{k+l})$ її циклічного зсуву $\mathbf{d}^{(k)}$, де $0 \leqslant k < n$, а $1 \leqslant l < n$, якщо $k \neq 0$, і $1 \leqslant l \leqslant n$, якщо $k = 0$, в якій $d_i \geqslant 0$ для всіх $k < i \leqslant k + l$, але якщо $l < n$, то і $d_k < 0$, і $d_{k+l+1} < 0$ (нагадаю, що ми поклали $d_{n+i} = d_i$). Визначимо її *ефективну довжину* $L(\mathbf{d}')$ як l, якщо $l = n$ або $\mathbf{d}' = (0, 0, \dots, 0)$, і як $l + 1$ в інших випадках. Нарешті, покладемо $\delta(\mathbf{d}, \lambda) = 1$, якщо $\lambda = 1$ і $\mathbf{d} = (0, 0, \dots, 0)$, і $\delta(\mathbf{d}, \lambda) = 0$ в інших випадках. Тоді для кожного нерозкладного векторного розшарування $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$ з теореми 7.1

$$\mathrm{h}^0(\mathcal{B}) = m\Big(\sum_{i=1}^{rs} (d_i + 1)^+ - \sum_{\mathbf{d}' \in \mathbf{P}} L(\mathbf{d}')\Big) + \delta(\mathbf{d}, \lambda),$$

$$\mathrm{h}^1(\mathcal{B}) = m\Big(\sum_{i=1}^{rs} (d_i + 1)^- + rs - \sum_{\mathbf{d}' \in \mathbf{P}} L(\mathbf{d}')\Big) + \delta(\mathbf{d}, \lambda),$$

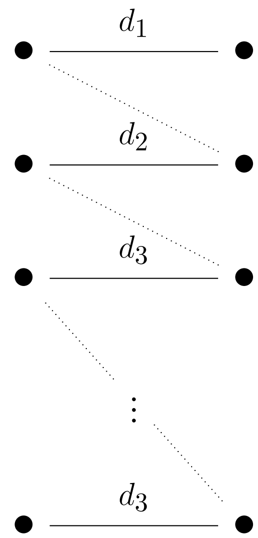
де $\mathbf{P}$ — множина циклічних додатних частин послідовності $\mathbf{d}$. Зокрема,

$$\chi(\mathcal{B}) = \chi(\widetilde{\mathcal{B}}) - mrs, \quad \text{де} \;\; \widetilde{\mathcal{B}} = \widetilde{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B} \simeq \pi_* \pi^* \mathcal{B}.$$

Наприклад, $\chi(\mathcal{O}_X) = 0$, а тому арифметичний рід кривої X дорівнює $1 - \chi(\mathcal{O}_X) = 1$.

Вправа 7.3. Доведіть, що кожен когерентний пучок без скруту $\mathcal{F}$ над X, який не є локально вільним, однозначно визначається парою $(k, \mathbf{d})$, де $0 \leqslant k < s$, а $\mathbf{d}$ — послідовність цілих чисел $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ довільної довжини. Його будова зображена на малюнку 5. Тут i-та горизонтальна лінія зображує лінійне розшарування степеня, вказаного над нею, над компонентою X_{k+i}, її лівий і правий кінці — базисні елементи цього розшарування в точках x'_{k+i} та x''_{k+i-1}, пунктирні лінії символізують «склеювання», причому всі ці склеювання тривіальні, тобто базисний

Мал. 5



елемент ототожнюється з базисним. Підрахуйте $\mathrm{rk}(\mathcal{F})$, $\mathrm{h}^i(\mathcal{F})$ і $\dim \mathcal{F}(x)$ для всіх точок $x \in X$.

(Порівняйте зі вправою 6.6).

Вправа 7.4. Нехай X — завузлена кубіка, тобто $s = 1$, $\tilde{X} = \mathbb{P}^1$ і X має єдину особливу точку x, яка є простою подвійною точкою. Доведіть, що якщо векторне розшарування $\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$ є *стабільним*, то $m = 1$, а всі числа послідовності $\mathbf{d}$ належать множині $\{\, d, d+1 \,\}$ для деякого $d \in \mathbb{Z}$. Крім того, $\mathcal{B}(\mathbf{d}, 1, \lambda)$ є стабільним тоді й тільки тоді, коли таким є $\mathcal{B}(\mathbf{d} - d\bar{1}, 1, 1)$, де $\bar{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ (отже, всі числа з $\mathbf{d} - d\bar{1}$ — це або 0, або 1).

Порада: Якщо $d_i \leqslant d_j - 2$, то існує ненульовий морфізм $f : \widetilde{\mathcal{O}}(d_i) \to \widetilde{\mathcal{O}}(d_j)$, для якого $f(x') = f(x'') = 0$. Він індукує необоротний ненульовий ендоморфізм $\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$. Якщо ж $d_i \in \{\, d, d+1 \,\}$, то $\mathrm{End}(\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)) \simeq \mathrm{End}(W)$, де $W = \mathsf{B}(w, m, \lambda)$ — відповідна стрічка з $\mathsf{El}(\mathscr{W})$.

Опис стабільних векторних розшарувань над завузленою кубікою дали І. Бурбан [**14, 12**] та С. Мозговий [**29**]. У розділі 9 ми запропонуємо інший підхід, розвинений Л. Боднарчук [**13**].

Приклад 7.5. Завершимо цей розділ прикладом нерозкладного векторного розшарування над завузленою кубікою, яке не є напівстабільним.

Це розшарування $\mathcal{B} = \mathcal{B}((0,5),1,1)$. Для нього $\operatorname{rk}\mathcal{B} = 2$, $\deg\mathcal{B} = 5$, тобто $\mu(\mathcal{B}) = 5/2$. Нехай $\mathcal{L}$ — лінійне розшарування степеня 3 (тобто $\mathcal{L} = \mathcal{B}(3,1,\lambda)$ для деякого λ). Існує ненульовий морфізм $f : \widetilde{\mathcal{O}}_X(3) \to \widetilde{\mathcal{O}}_X(5)$, для якого $f(x') = f(x'') = 0$. Він індукує ненульовий морфізм $\mathcal{L} \to \mathcal{B}$. Отже, $\mathcal{B}$ містить підпучок, ізоморфний $\mathcal{L}$, який має нахил 3, тобто $\mathcal{B}$ не є напівстабільним.

Розділ 8

Дикі випадки

Виявляється, що розглянуті класи проективних кривих: проективна пряма, еліптичні криві, проективні конфігурації типів A та $\widetilde{\mathrm{A}}$ — вичерпують усі випадки, коли можна одержати більш-менш «прийнятний» опис усіх векторних розшарувань. Всі інші проективні криві є, як зараз кажуть, *ВР-дикими* (дикими відносно класифікації векторних розшарувань). Неформально, це означає, що опис векторних розшарувань над такою кривою містить опис зображень усіх скінченно породжених алгебр над полем $\Bbbk$. Наведемо й формальне означення.

ОЗНАЧЕННЯ 8.1. Крива X зветься *ВР-дикою*, якщо для кожної скінченнопородженої алгебри Λ над полем $\Bbbk$ існує точний функтор $\Phi : \Lambda\text{-mod} \to \mathrm{VB}(X)$, де Λ-mod позначає категорію всіх скінченновимірних Λ-модулів, такий, що з ізоморфізму $\Phi(M) \simeq \Phi(N)$ випливає ізоморфізм $M \simeq N$, а якщо модуль M нерозкладний, таким є й векторне розшарування $\Phi(M)$.

Такий функтор Φ звуть «*зображувальним зануренням*».

Очевидно, не можна сподіватися на повний опис векторних розшарувань над BP-дикими кривими. Незважаючи на це, вивчення спеціальних класів розшарувань над ними залишається важливою й перспективною задачею. Так, дослідження стабільних розшарувань над неособливими кривими (більшість з яких є BP-дикими) займає важливе місце в сучасній алгебричній геометрії. У наступному розділі ми побачимо, що техніка матричних задач дає, зокрема, ефективний метод вивчення стабільних розшарувань над особливими кривими.

Теорема 8.2. *Якщо проективна крива X не є ані проективною прямою, ані еліптичною кривою, ані проективною конфігурацією типу* A *або* $\widetilde{\mathrm{A}}$*, то вона є BP-дикою.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що достатньо знайти зображувальне занурення $\Phi : \Lambda\text{-mod} \to \mathrm{VB}(X)$ для однієї алгебри Λ, а саме, для вільної некомутативної $\Bbbk$-алгебри з двома твірними $\Sigma = \Bbbk\langle\, z_1, z_2\,\rangle$. Це безпосередньо випливає з такої леми.

Лема 8.3. *Для кожної скінченнопородженої алгебри Λ над полем $\Bbbk$ існує зображувальне занурення* $\Phi : \Lambda\text{-mod} \to \Sigma\text{-mod}$.

Доведення. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — твірні алгебри Λ. Скінченнопороджений Λ-модуль M задається набором квадратних матриць $A_1, A_2, \ldots,$ A_n над полем $\Bbbk$, які задовольняють певним співвідношенням (тим самим, яким задовольняють твірні $a_1, a_2, \ldots, a_n$). Будемо писати $M = M(A_1,$ $A_2, \ldots, A_n$. Гомоморфізм

$$M\,(A_1, A_2, \ldots, A_n) \to M\,(B_1, B_2, \ldots, B_n)$$

задається матрицею C такою, що $CA_i = B_iC$ для всіх i. Модуль $M\,(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ є розкладним тоді й тільки тоді, коли існує така матриця E, що $EA_i = A_iE$ для всіх i, $E^2 = E$ і E не є ні нульовою, ні одиничною. Зокрема, Σ-модуль задається довільною парою матриць Z_1, Z_2. Якщо $M = M\,(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ — деякий Λ-модуль, то визначимо $\Phi(M)$ як Σ-модуль, заданий такою парою Z_1, Z_2:

$$Z_1 = \begin{pmatrix} A_1 & I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & I & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{n-1} & I \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & A_n \end{pmatrix},$$

$$Z_2 = \operatorname{diag}\,(\,\lambda_1 I, \lambda_2 I, \lambda_3 I, \lambda_4 I, \lambda_5 I\,),$$

де $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ — попарно різні елементи поля $\Bbbk$, а I — одинична матриця того ж розміру, що й матриці A_i. Легко бачити, що довільний гомоморфізм $\Phi(M) \to \Phi(M')$, де $M' = M(A'_1, A'_2, \dots, A'_n)$, буде задавитися блочно-діагональною матрицею $\operatorname{diag}(C, C, \dots, C)$, причому $C \in \operatorname{Hom}_\Lambda(M, M')$ (перевірте це!). Очевидно, звідси випливає, що Φ є зображувальним зануренням. $\square$

Наслідок 8.4. *Крива X є BP-дикою тоді й тільки тоді, коли існує зображувальне занурення Σ-mod $\to \mathrm{VB}(X)$.*

Доведення теореми 8.1 складається з кількох випадків. У кожному з них для деякої кривої буде побудоване зображувальне занурення $\Phi : \Sigma\text{-mod} \to \mathrm{VB}(X)$. Оскільки перевірка того, що Φ є зображувальним зануренням, зводиться до прямих матричних обчислень, ми здебільшого випускаємо її й лише в окремих випадках даємо короткі пояснення.

Випадок 1. X — неособлива крива роду g, де $g > 1$.

Оскільки $g > 1$, то $\chi(\mathcal{L}) < 0$ для кожного лінійного розшарування степеня 0, а тому $\mathrm{h}^1(\mathcal{L}) > 0$. Зокрема,

$$\operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y)) \simeq \mathrm{H}^1(\mathcal{O}(y - x)) \neq 0,$$

де $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$, а $x, y \in X$. З іншого боку,

$$\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y)) \simeq \mathrm{H}^0(\mathcal{O}(y-x)) = 0,$$

якщо $x \neq y$, а $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{L}, \mathcal{L}) = \Bbbk$ для кожного лінійного розшарування $\mathcal{L}$.

Нехай x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — попарно різні точки кривої X, а ξ_{ij} — ненульові елементи з простору $\mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{O}(x_i), \mathcal{O}(x_j))$. Для кожної пари матриць $Z_1, Z_2 \in \mathrm{Mat}(n \times n, \Bbbk)$, які визначають Σ-модуль $M = M(Z_1, Z_2)$, позначимо через $\xi(Z_1, Z_2)$ елемент з простору

$$\mathrm{Ext}^1_X\big(n\mathcal{O}(x_3) \oplus n\mathcal{O}(x_4) \oplus n\mathcal{O}(x_5),\ n\mathcal{O}(x_1) \oplus n\mathcal{O}(x_2)\big),$$

що задається матрицею

$$\Xi(Z_1, Z_2) = \begin{pmatrix} \xi_{31} I_n & \xi_{41} I_n & \xi_{51} I_n \\ \xi_{32} I_n & \xi_{42} Z_1 & \xi_{52} Z_2 \end{pmatrix},$$

а через $\Phi(M) = \mathcal{F}(Z_1, Z_2)$ — відповідне розширення пучка $n\mathcal{O}(x_3) \oplus n\mathcal{O}(x_4) \oplus n\mathcal{O}(x_5)$ з ядром $n\mathcal{O}(x_1) \oplus n\mathcal{O}(x_2)$. Оскільки $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}(x_i), \mathcal{O}_X(x_j)) = 0$ при $i \neq j$, кожен морфізм $\sigma : \mathcal{F}(Z_1, Z_2) \to \to \mathcal{F}(Z_1', Z_2')$ відображає підпучок $n\mathcal{O}(x_1) \oplus \mathcal{O}(x_2)$ у $n'\mathcal{O}(x_1) \oplus n'\mathcal{O}(x_2)$, отже, індукує морфізми

$$\sigma_1 : n\mathcal{O}(x_1) \oplus n\mathcal{O}(x_2)) \to n'\mathcal{O}(x_1) \oplus n'\mathcal{O}(x_2)$$

та

$$\begin{aligned} \sigma_2 : n\mathcal{O}(x_3) \oplus n\mathcal{O}(x_4) \oplus n\mathcal{O}(x_5) \to \\ \to n'\mathcal{O}(x_3) \oplus n'\mathcal{O}(x_4) \oplus n'\mathcal{O}(x_5), \end{aligned}$$

для яких $\sigma_1\xi(Z_1, Z_2) = \xi(Z'_1, Z'_2)\sigma$, або, що те саме,

$$C_1\Xi(Z_1, Z_2) = \Xi(Z'_1, Z'_2)C_2,$$

якщо σ_i заданий матрицею C_i. Крім того, обидві матриці C_1 та C_2 є блочно діагональними: $C_1 = \operatorname{diag}(C_{11}, C_{12})$ і $C_2 = \operatorname{diag}(C_{23}, C_{24}, C_{25})$, де $C_{ij} \in \operatorname{Hom}_X(n_j\mathcal{O}(x_j), n_j\mathcal{O}_(x_j))$. Тепер з рівності $C_1\Xi(Z_1, Z_2) = \Xi(Z'_1, Z'_2)C_2$ одразу випливає, що всі матриці C_{ij} однакові, $C_{ij} = C$, і $CZ_i = Z'_iC$ $(i = 1, 2)$, тобто C є морфізмом модулів $M(Z_1, Z_2) \to M(Z'_1, Z'_2)$. Це означає, що Φ є зануренням категорій (тим більше, зображувальним зануренням) Σ-mod $\to \mathrm{VB}(X)$.

Тепер можна обмежитись розглядом особливих кривих.

Випадок 2. Одна з компонент $X_1, X_2, \dots, X_s$ кривої X не є раціональною.

Припустимо, що X_1 — нераціональна, тобто її нормалізація $\tilde{X}_1$ має рід $g \geqslant 1$. Оскільки X є зв'язною, то існує особлива точка p, яка належить до X_1. Припустимо, що точка p має на нормалізації $\tilde{X}$ принаймні два прообрази (якщо прообраз лише 1, то алгебра $\widetilde{\mathsf{F}}_p$ не є напівпростою, що лише спрощує обчислення, див. нижче). Нехай $\{\, p_1, p_2, \dots, p_t \,\}$ — всі прообрази p, причому $p_1 \in \tilde{X}_1$, а Y — компонента $\tilde{X}$, на якій лежить точка p_2 (можливо, $Y = \tilde{X}_1$). Нехай $\{\, p_{t+1}, \dots, p_l \,\}$

— всі інші точки з $\widetilde{S}$. Оберемо 4 різні точки x_i ($i = 1, \ldots, 4$) на $\tilde{X}_1 \setminus \widetilde{S}$, а на $Y \setminus \widetilde{S}$ — ще якусь точку y (відмінну від усіх x_i). Для кожного Σ-модуля $M = M(Z_1, Z_2)$, де Z_i — розміру $n \times n$, розглянемо об'єкт $W = W(Z_1, Z_2)$ з $\mathsf{El}(\mathscr{W})$ такий, що $W \in \mathscr{W}(4n\mathsf{A}, n\mathcal{A})$, де $\mathcal{A} = \bigoplus_{k=1}^{4} \widetilde{\mathcal{O}}(x_k + ky)$, всі компоненти W в $\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(4n\mathsf{A}, n\mathcal{A}_{p_i}/\mathcal{J}\mathcal{A}_{p_i})$ при $1 < i \leqslant l$ — одиничні матриці, а його компонента в $\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(4n\mathsf{A}, n(\mathcal{A}_{p_1}/\mathcal{J}\mathcal{A}_{p_1}))$ дорівнює

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & I \\ 0 & I & I & Z_1 \\ I & 0 & I & Z_2 \end{pmatrix}.$$

З того, що

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_1}}(\mathcal{O}_{X_1}(x_k), \mathcal{O}_{X_1}(x_j)) = 0 \quad \text{при } k \neq j$$

і

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y(ky), \mathcal{O}_Y(jy)) = 0 \quad \text{при } k > j,$$

нескладно вивести, що в такий спосіб отримуємо зображувальне занурення $\Sigma\text{-mod} \to \mathrm{VB}(X)$.

Отже, надалі будемо вважати, що всі компоненти X — раціональні, тобто всі компоненти $\tilde{X}$ ізоморфні $\mathbb{P}^1$.

Випадок 3. B не є напівпростою.

Виберемо точку $p \in S$, для якої алгебра B_p не є напівпростою, і ненульовий елемент $\theta \in \operatorname{rad}\mathsf{B}_p$. Покладемо $\mathcal{A} = 4\widetilde{\mathcal{O}} \oplus 4\widetilde{\mathcal{O}}(x) \oplus 4\widetilde{\mathcal{O}}(2x) \oplus \widetilde{\mathcal{O}}(3x)$, де $x \notin \widetilde{S}$ належить тій самій компоненті, що й p. Для кожної пари (Z_1, Z_2) матриць розміру $n \times n$ розглянемо матриці

$$A_1 = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

і визначимо елемент $W = W(Z_1, Z_2)$ з простору $\mathscr{W}(7n\mathsf{A}, n\mathcal{A})$ як такий, що всі його компоненти, крім тієї, що належить $\operatorname{Hom}_{\mathsf{A}}(7n\mathsf{A}_p, \mathcal{A}_p/\mathcal{J}\mathcal{A}_p)$, є одиничними матрицями, а остання дорівнює

$$\begin{pmatrix} I_{2n} & 0 & 0 & 0 & \theta I_{2n} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2n} & \theta I_{2n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{2n} & \theta A_1 & \theta A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{2n} & 0 & \theta A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{2n} & \theta A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{2n} & \theta A_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Знов-таки, безпосередніми обчисленнями, які ми залишаємо читачеві, можна показати, що в такий спосіб одержуємо зображувальне занурення $\Sigma\text{-mod} \to \mathrm{VB}(X)$.

Отже, тепер можна вважати, що алгебра B є напівпростою. Інакше кажучи, всі особливі точки з X є *простими кратними точками*, тобто такими, що число дотичних напрямків в кожній з них дорівнює кратності цієї точки.

Випадок 4. Існує особлива точка p кратності l, де $l > 2$.

Нехай p — точка кратності $l \geqslant 3$, а $p_1, p_2, \dots, p_l$ — всі її прообрази на $\tilde{X}$. Позначимо через Y_i компоненту $\tilde{X}$, яка містить p_i (деякі з цих компонент можуть співпадати). Виберемо попарно різні точки $y_i \in Y_i \setminus \widetilde{S}$ і покладемо $\mathcal{A} = \bigoplus_{k=1}^{4} \widetilde{\mathcal{O}}(ky_1 + ky_2 + ky_3)$. Для кожної пари $(n \times n)$-матриць (Z_1, Z_2) розглянемо об'єкт $W \in \mathscr{W}(4n\mathsf{A}, n\mathcal{A})$, для якого всі компоненти є одиничними матрицями, крім тих, які відповідають точкам p_1 і p_2, а ці дві дорівнюють відповідно

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{pmatrix} I_n & I_n & Z_1 & Z_2 \\ 0 & I_n & I_n & I_n \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Ця відповідність задає зображувальне занурення $\Sigma\text{-mod} \to \mathrm{VB}(X)$ (перевірте!).

Нарешті, залишилось розглянути *проективні конфігурації*. Щоб завершити доведення, треба показати, що якщо проективна конфігурація X не є BP-дикою, то кожна компонента $\tilde{X}$ містить щонайбільше 2 точки з $\widetilde{S}$. Якщо ж остання умова виконана, то X є конфігурацією типу A або

$\widetilde{\mathrm{A}}$. Отже, доведення завершується останнім випадком.

Випадок 5. X — проективна конфігурація і якась компонента $\tilde{X}$ містить принаймні 3 точки з $\widetilde{S}$.

Нехай $\widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2, \dots, \widetilde{S}_s$ — всі компоненти $\widetilde{S}$. Будемо вважати, що компонента $\tilde{X}_1$ містить 3 точки $p'_1, p'_2, p'_3 \in \widetilde{S}$, які походять з різних точок $p_1, p_2, p_3 \in S$, причому ті точки p''_1, p''_2, p''_3, для яких $\nu^{-1}(p_i) = \{p'_i, p''_i\}$, належать іншим компонентам (інші випадки розглядаються аналогічно, причому обчислення є простішими). Для кожної пари квадратних матриць Z_1, Z_2 розміру $n \times n$ побудуємо елемент $W(Z_1, Z_2) \in \mathscr{W}(4n\mathsf{A}, n\mathcal{A})$, де $\mathcal{A} = 4\widetilde{\mathcal{O}}_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^{s} \left(\bigoplus_{k=0}^{3} \widetilde{\mathcal{O}}_i(k) \right)$, а матриці, які визначають $W(Z_1, Z_2)$, є одиничними, за винятком тих, які відповідають точкам p'_2 та p'_3, а останні дорівнюють відповідно

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

та

$$P_3(Z_1, Z_2) = \begin{pmatrix} I_n & I_n & Z_1 & Z_2 \\ 0 & I_n & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n & I_n \\ 0 & 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}$$

Нехай (f_l, f_r) — морфізм $W(Z_1, Z_2) \to W(Z_1', Z_2')$. Якщо $k > k'$, то $\mathrm{Hom}(\widetilde{\mathcal{O}}_i(k), \widetilde{\mathcal{O}}_i(k')) = 0$. Тому та частина морфізму f_l, яка відповідає компоненті, що містить точку p_i'' $(i = 1, 2, 3)$, задається нижньою блочно-трикутною матрицею. Звідси безпосередньо випливає, що компонента F_k гомоморфізму f_r, яка відповідає відображенню просторів $4n\Bbbk(p_i) \to 4n'\Bbbk(p_i)$, також мусить бути нижньою блочно-трикутною. Тоді, оскільки матриця, яка відповідає точці p_1', одинична, компонента F морфізму f_l, яка задає морфізм $4n\widetilde{\mathcal{O}}_1 \to 4n'\widetilde{\mathcal{O}}_1$, також є нижньою блочно-трикутною. З іншого боку, з вигляду матриці P_2 випливає, що F має бути вже верхньою блочно-трикутною. Отже, вона є блочно-діагональною: $F = \mathrm{diag}(C_1, C_2, C_3, C_4)$. Але $FP_3(Z_1, Z_2) = P_3(Z_1'Z_2')F_3$ і F_3 — нижня блочно-трикутна. Легко переконатися, що це можливо лише тоді, коли $F = F_3$, причому всі компоненти F однакові: $F = \mathrm{diag}(C, C, C, C)$, і $CZ_j = Z_j'C$ $(j = 1, 2)$, тобто C є гомоморфізмом $M(Z_1, Z_2) \to M(Z_1', Z_2')$. В результаті отримуємо зображувальне занурення $\Sigma\text{-mod} \to \mathrm{VB}(X)$. $\square$

Розділ 9

Стабільні векторні розшарування

Хоч повний опис векторних розшарувань, скажімо, над кубікою з вістрям, в певному сенсі нереальне, можна спробувати описати принаймні *стабільні векторні розшарування.* Насправді, для кубіки з вістрям (і для деяких інших особливих кривих) це можна зробити, застосовуючи ту саму техніку бімодульних категорій (див. [**11**] та [**12**]).

Нехай X — кубіка з вістрям, задана в афінній частині проективної площини рівнянням $y^2 = x^3$. Вона має єдину особливу точку $p = (0, 0)$ і нормалізацію $\pi : \mathbb{P}^1 \to X$ таку, що $\pi^{-1}(p)$ складається з єдиної точки, яку ми також позначимо через p. При цьому кондуктором є $\mathcal{J} = \widetilde{\mathcal{O}}(2p)$, отже, $\mathsf{A} = \mathcal{O}/\mathcal{J} = \Bbbk$ і $\mathsf{B} = \widetilde{\mathcal{O}}/\mathcal{J} \simeq \Bbbk[t]/t^2$, де t — локальний параметр на $\mathbb{P}^1$ у точці p. Оскільки $\widetilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \simeq \Bbbk$, $\chi(\mathcal{O}) = \chi(\widetilde{\mathcal{O}}) - 1 = 0$, тобто $g(X) = 1$. Зокрема, можна застосувати наслідок 2.4 і твердження 2.5. З них випливає, що *стабільні векторні розшарування* — це те саме, що *цеглини*, тобто векторні розшарування, які мають лише скалярні ендоморфізми.

Основний результат цього розділу — опис стабільних векторних розшарувань над кубікою з вістрям.

Теорема 9.1. (1) *Якщо векторне розшарування $\mathcal{F}$ стабільне, то його ранг і степінь співпервинні.*

(2) *Навпаки, якщо* нсд $(r, d) = 1$*, то стабільні векторні розшарування рангу r і степеня d існують і утворюють однопараметричну сім'ю $\mathcal{B}(r, d; \lambda)$, параметризовану $\Bbbk$.*

Зауважимо, що цей опис цілком аналогічний випадку еліптичних кривих (Наслідок 2.13), оскільки в даному випадку $\operatorname{Pic}_0 X \simeq \Bbbk$.

Доведення. Скористаємося сендвич-процедурою і бімодульними категоріями, як це визначено у розділах 3 та 4. Ми завжди ототожнюємо $\widetilde{\mathcal{O}}(d)/\mathcal{J}\widetilde{\mathcal{O}}(d)$ з B. Якщо морфізм $\widetilde{\mathcal{O}}(d) \to$ $\to \widetilde{\mathcal{O}}(d')$ заданий многочленом $f(t)$, то індуковане відображення $\mathsf{B} \to \mathsf{B}$ також є множенням на $f(t)$, або, що те саме, на його лінійну частину. Тому, якщо розглянути бімодуль $\mathscr{W}$ з розділу 4, який виникає з сендвіч-категорії, пов'язаної з кривою X, елементи з $\mathscr{W}(r\mathsf{A}, \bigoplus_n m_n\mathcal{O}(n))$ можна зображати, як блочні матриці (стовпчики з блоків) $W = (W(n))$, де $W(n)$ має розмір $m_n \times r$ і коефіцієнти з B. Аналогічно, морфізм $f : W \to W' \in \mathscr{W}(r'\mathsf{A}, \bigoplus_d m'_d\mathcal{O}(n))$ задається парою матриць (f_1, f_0), в якій $f_0 \in \mathrm{Mat}(r' \times r, \Bbbk)$, а f_1 — блочна матриця: $f_1 = (\phi_{n'n})$, де $\phi_{n'n}$ має розмір $m'_{n'} \times m_n$ і коефіцієнти з $\Bbbk[t]_{n'-n}$ (нулі, якщо $n' < n$). Ці матриці повинні задовольняти рівності $W'(n')f_0 = \sum_n \phi_{n'n}W(n)$. Крім того, матриця W відповідає векторному розшаруванню тоді й тільки тоді, коли вона є оборотною, а морфізм f є ізоморфізмом тоді й тільки тоді, коли оборотними будуть всі матриці ϕ_{nn} та матриця f_0. Позначимо через $\mathscr{E}$ повну підкатегорію в $\mathsf{El}(\mathscr{W})$, яка складається з оборотних матриць W. Оскільки $\mathrm{VB}(X) \simeq \mathscr{T}(X) \simeq \mathscr{E}$, то стабільні векторні розшарування над X знаходяться у взаємно однозначній відповідності з цеглинами в категорії $\mathscr{E}$, отже, нам потрібно вивчати ці цеглини. Зауважимо, що коли $W \in \mathscr{E}$, то ранг відповідного векторного розшарування $\mathcal{F}$ дорівнює $r = \sum_n m_n$, а $\deg \mathcal{F} = d = \sum_n nm_n$. Позначимо $\mathrm{rk}\, W = r$ і $\deg W = d$ і назвемо їх відповідно *рангом* і *степенем* блочної матриці W.

Так само, як у вправі 7.4, легко довести

Твердження 9.2. *Якщо $W \in \mathscr{E}$ є цеглиною, то $m_i = 0$ за винятком щонайбільше двох значень: m_n та, можливо, m_{n+1}.*

Доведення. Вправа! □

Завдяки цьому твердженню далі завжди вважатимемо, що матриця W має щонайбільше 2 блоки: $W(n)$ і, можливо, $W(n+1)$, розмірів відповідно $k \times r$ і $l \times r$. Тоді $r = \operatorname{rk} W = k + l$ і $d = \deg W = nk + (n+1)l$. Зазначимо, що розміри k, l та номер n однозначно відновлюються за числами r і d, а саме, $n = \lfloor d/r \rfloor,\ l = d - rn$ і $k = r - l$. Зауважимо також, що нсд $(k, l) =$ нсд (r, d). Повну підкатегорію в $\mathscr{E}$, яка складається з усіх таких матриць, позначимо через $\mathscr{E}_n$. Очевидно, всі ці категорії еквівалентні, а тому можна обмежитись розглядом категорії $\mathscr{E}_0$, в якій матриці мають лише блоки $W(0)$ та, можливо, $W(1)$.

Зручно записувати W як суму $W = W_0 \oplus tW_1$, де W_0 та W_1 мають коефіцієнти з поля $\Bbbk$. Така матриця є оборотною тоді й тільки тоді, коли оборотною є W_0. За цієї умови W_0 зводиться до одиничної матриці:

$$W_0 = \left(\begin{array}{cc} I_k & 0 \\ \hline 0 & I_l \end{array}\right), \text{ і відповідно } W_1 = \left(\begin{array}{cc} A_1 & A_0 \\ \hline A_3 & A_2 \end{array}\right),$$

де горизонтальна лінія показує поділ W на блоки $W(0)$ (верхній) та $W(1)$ (нижній). Далі будемо фіксувати матрицю W_0 і вивчати лише W_1. Легко перевірити, що тоді пари матриць f_0, f_1 які визначають морфізми W, мають вигляд

$$f_0 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_0 & C_2 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_0 + \beta t & C_2 \end{pmatrix},$$

де C_i та β — матриці над $\Bbbk$. Така пара задає ізоморфізм тоді й тільки тоді, коли матриці C_1

і C_2 оборотні. Взявши в якості C_1, C_2 одиничні матриці й поклавши $C_0 = 0$ і $\beta = -A_3$, ми зробимо нульовою матрицю A_3. Це не змінює вигляду матриць, які задають морфізми, але блок β в них буде однозначно визначатися через інші блоки. Тепер матриця W, а тому й векторне розшарування $\mathcal{F}$, задається трійкою (A_0, A_1, A_2), а морфізм $W \to W'$, де матриця W' визначена трійкою (A'_0, A'_1, A'_2), задається трійкою матриць (C_0, C_1, C_2) такою, що виконуються рівності:

$$\begin{aligned} C_1 A_0 &= A'_0 C_2, \\ C_1 A_1 &= A'_1 C_1 + A'_0 C_0, \\ C_2 A_2 + C_0 A_0 &= A_2 C_2. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Трійки (A_0, A_1, A_2) з морфізмами, визначеними формулами 9.1, знову можна розглядати як елементи бімодульної категорії $\mathsf{El}(\mathscr{V})$. Для цього треба розглянути категорію $\mathcal{P}_0$ шляхів сагайдака (орієнтованого графа) $1 \xrightarrow{c_0} 2$ і $\mathcal{P}_0$-бімодуль $\mathcal{V}_0$ такий, що простори $\mathscr{V}_0(1,1), \mathscr{V}_0(2,2)$ та $\mathscr{V}_0(2,1)$ є одновимірними й породжені, відповідно, елементами a_1, a_2 та a_0, $\mathscr{V}_0(1,2) = 0$, а дія категорії визначається правилами $c_0 a_0 = a_2$, $a_0 c_0 = a_1$, $c_0 a_1 = a_2 c_0 = 0$. Тепер за $\mathscr{V}$ треба взяти продовження бімодуля $\mathscr{V}_0$ на адитивне замикання $\mathcal{P}$ категорії $\mathcal{P}_0$ (переконайтесь у цьому).

Якщо $l = 0$, тобто $W = W(0)$, матриці A_0, A_2 зникають, а A_1 можна звести до жорданової нормальної форми. Якщо W є цеглиною, то A_1 складається з однієї одновимірної клітини $J_1(\lambda)$: інакше W матиме нетривіальні ендоморфізми. Позначимо відповідне векторне розшарування через $\mathcal{B}(1,0;\lambda)$ (або через $\mathcal{B}(1,n;\lambda)$, якщо розглядаємо категорію $\mathcal{E}_n$; при цьому $r = 1$, $d = n$).

Нехай тепер $l \neq 0$, тобто $W(1)$ і A_0 наявні. Зведемо A_0 до діагонального вигляду: $A_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Наступне просте міркування є насправді ключовим в усьому доведенні.

Лема 9.3. *Якщо W є цеглиною, то* $\operatorname{rk} A_0 = \min(k,l)$.

Доведення. Якщо це не так, то останній стовпчик і останній рядок в A_0 є нульовими. Тоді трійка (C_0, C_1, C_2), де $C_1 = C_2 = 0$, а

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

визначає нетривіальний ендоморфізм матриці W. $\square$

Зокрема, якщо $k = l$, то $A_0 = I_k$. Поклавши $C_1 = I_k,\ C_2 = I_l,\ C_0 = -A_2$, перетворюємо матрицю A_2 на нульову. Тоді A_1 зводиться до жорданової нормальної форми і знов-таки вона може містити лише одну одновимірну клітину $J_1(\lambda)$, отже, $k = l = 1$, $r = 2$ і $d = 1$. Відповідне векторне розшарування позначимо через $\mathcal{B}(2,1;\lambda)$ (через $\mathcal{B}(2,2n+1;\lambda)$, якщо ми розглядаємо категорію $\mathcal{E}_n$; тоді $d = 2n+1$).

Припустимо тепер, що $k < l$; тоді A_0 зводиться до вигляду $\begin{pmatrix} I_k & 0 \end{pmatrix}$, після чого можна перетворити матрицю A_1 на нульову, а A_2 звести до вигляду $A_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, де B_1 — розміру $k \times k$, а B_2 — розміру $(l-k) \times (l-k)$ (перевірте це). Тепер нескладно перевірити (зробіть це), що, відображаючи трійку (A_0, A_1, A_2) у (B_0, B_1, B_2), ми визначаємо строгий точний функтор («занурення категорій») $\mathsf{El}(\mathscr{V}) \to \mathsf{El}(\mathscr{V})$. Зауважимо, що при цьому пара розмірів (k,l) замінюється на $(k, l-k)$. Отже, можна скористатися індукцією (скажімо, за більшим з цих розмірів). Обчислення у випадку $k > l$ цілком аналогічні; в результаті ми одержуємо трійку з розмірами $(k-l, l)$. Цим і завершується доведення. $\square$

ВПРАВА 9.4. (1) Користуючись щойно описаною рекурсивною процедурою «зведення», доведіть, що для кожної цеглини W з категорії $\mathcal{E}$ відповідна трійка (A_0, A_1, A_2) є такою, що $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & A_0 \end{pmatrix} = k$ і $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_0 \\ A_2 \end{pmatrix} = l$.

(2) Виведіть з (1), що для векторного розшарування $\mathcal{B} = \mathcal{B}(r, d, \lambda)$

$$\mathrm{h}^0(\mathcal{B}) = \begin{cases} d, & \text{якщо } d > 0, \\ 1, & \text{якщо } d = \lambda = 0, \\ 0 & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

$$\mathrm{h}^1(\mathcal{B}) = \begin{cases} -d, & \text{якщо } d < 0, \\ 1, & \text{якщо } d = \lambda = 0, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Порада: Тут доцільно використати такі ж міркування, що й у доведенні твердження 6.4.

Вправа 9.5. Скористайтеся подібною процедурою, щоб довести аналоги теореми 9.1 та вправи 9.4 для завузленої кубіки $y^2 = x^3 + x^2$. Саме, якщо X — завузлена кубіка, то:

(1) *Якщо $\mathcal{F}$ — стабільне векторне розшарування, його ранг і степінь співпервинні.*

(2) *Навпаки, якщо* нсд $(r, d) = 1$, *то стабільні векторні розшарування рангу r і степеня d існують і утворюють однопараметричну сім'ю $\mathcal{B}(r, d; \lambda)$, параметризовану $\Bbbk^\times$.*

(3) *Для* $\mathcal{B} = \mathcal{B}(r, d; \lambda)$

$$\mathrm{h}^0(\mathcal{B}) = \begin{cases} d, & \text{якщо } d > 0, \\ 1, & \text{якщо } d = 0,\ \lambda = 1 \\ 0 & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

$$\mathrm{h}^1(\mathcal{B}) = \begin{cases} -d, & \text{якщо } d < 0, \\ 1, & \text{якщо } d = 0,\ \lambda = 1 \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Оскільки для завузленої кубіки $\operatorname{Pic}_0 X \simeq \Bbbk^\times$ [**7**], знову маємо аналогію з випадком еліптичних кривих.

Порада: Згідно з розділом 7, зокрема, із вправою 7.4, опис таких розшарувань зводиться до пошуку *цеглин* серед стрічок для в'язки ланцюгів $\mathfrak{E}_1 = \{ e_1, e_2 \}$, $\mathfrak{F}_1 = \{f\}$, $\mathfrak{E}'_1 = \{ e'_1, e'_2 \}$, $\mathfrak{F}'_1 = \{f'\}$, $e_i \sim e'_i$, $f \sim f'$. Зведіть великий блок, який відповідає ланцюгам $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{F}_1$, до одиничного вигляду, після чого одержимо нову в'язку, яка складається з однієї пари ланцюгів $\mathfrak{E} = \{b_1 < b_2\}$, $\mathfrak{F} = \{ a_1 < a_2 \}$, $a_i \sim b_i$. Користуючись результатами розділу 5, доведіть, що в кожній цеглині для нової в'язки ланцюгів матриця $W(a_2, b_1)$ має *максимальний ранг*: $\operatorname{rk} W(a_2, b_1) = \min(n_{a_2}, n_{b_1})$. Далі наслідуйте доведення теореми 9.1.

Покажчик

Бібліоґрафія

[1] Х. Басс. Алгебраическая K-теория. — Москва: Мир, 1973.

[2] В. М. Бондаренко. Представления пучков полуцепных множеств и их применения // Алгебра и анализ. — 1991. — **3**, № 5. — С. 38–61.

[3] А. Гротендик. О некоторых вопросах гомологической алгебры. — Москва: ИЛ, 1961.

[4] Ю. А. Дрозд. Вступ до алгебричної геометрії. — Львів: Класика, 2004.

[5] Ю. А. Дрозд и В. В. Кириченко. Конечномерные алгебры. — К.: Вища школа, 1980.

[6] И. Ламбек. Кольца и модули. Москва: Мир, 1971.

[7] Ж.-П. Серр. Алгебраические группы и поля классов. Москва: Мир, 1968.

[8] К. Фейс. Алгебра: Кольца, модули и категории. 2. Москва: Мир, 1979.

[9] Р. Хартсхорн. Алгебраическая геометрия. Москва: Мир, 1981.

[10] M. Atiyah. Vector bundles over an elliptic curve // Proc. London Math. Soc. — 1957. — **7**. — P. 414–452.

[11] L. Bodnarchuk, Y. Drozd. Stable vector bundles over cuspidal cubics // Cent. Eur. J. Math. — 2003. — **1**. — P. 650–660.

[12] L. Bodnarchuk, I. Burban, Y. Drozd, G.-M. Greuel. Vector bundles and torsion free sheaves on degenerations of elliptic curves // Global Aspects of Complex Analisys. — Springer–Verlag, 2006. P. 183–128.

[13] L. Bodnarchuk, Y. Drozd, G.-M. Greuel. Simple vector bundles on plane degenerations of an elliptic curve // arXiv:0903.4966 [math.AG].
[14] I. Burban. Stable vector bundles on a rational curve with one node // Ukrain. Mat. Zh. — 2003. — **55**. — P. 867–874.
[15] I. Burban, Y. Drozd. Coherent sheaves on rational curves with simple double points and transversal intersections // Duke Math. J. — 2004. — **121**. — P. 189–229.
[16] I. Burban, Y. Drozd. Derived categories for nodal rings and projective configurations // Noncommutative Algebra and Geometry. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. — 2006. — **243**. — P. 23-46.
[17] I. Burban, B. Kreußler. Fourier–Mukai transforms and semi–stable sheaves on nodal Weierstraß cubics // J. Reine Angew. Math. — 2005. — bf584. — P. 45–82. (arxiv: math.AG/0401437).
[18] I. Burban, B. Kreußler. Vector bundles on degenerations of elliptic curves and Yang–Baxter equations // arXiv:math/0708.1685 [math.AG].
[19] Y. Drozd. Cohen–Macaulay modules over Cohen–Macaulay algebras // Representation Theory of Algebras and Related Topics. CMS Conference Proceedings. — 1996. — **19**. — P. 25-53.
[20] Y. Drozd. Vector bundles and Cohen-Macaulay modules // Representations of Finite Dimensional Algebras and Related Topics in Lie Theory and Geometry. Field Institute Communications. — 2004. — **40**. — P. 189–222. (arXiv:math.AG/0310368)
[21] Y. Drozd. Vector Bundles over Projective Curves. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[22] Y. A. Drozd, G.-M. Greuel. Tame and wild projective curves and classification of vector bundles // J. Algebra. — 2001. — **246**. — P. 1–54.

[23] Y. Drozd, G.-M. Greuel, I. Kashuba. On Cohen-Macaulay modules on surface singularities // Mosc. Math. J. — 2003. — **3**. — P. 397–418.

[24] J. Giraud. Cohomologie non-abelienne. Springer–Verlag, 1971.

[25] A. Grothendieck. Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann // Amer. J. Math. — 1956. — **79**. — P. 121–138.

[26] C. Kahn. Reflexive modules on minimally elliptic singularities // Math. Ann. — 1989. — **285**. — 141-160.

[27] T. Y. Lam. Serre's Conjecture // Lecture Notes in Math. — 1978. — **635**.

[28] J. Le Potier. Lectures on vector bundles // Cambridge Studies in Advanced Mathematics. — 1997. — **54**.

[29] S. Mozgovoy. Classification of semi-stable sheaves on a rational curve with one node // arXiv: math.AG/0410190.

[30] T. Oda. Vector bundles on an elliptic curve // Nagoya Math. J. — 1971. — **43**. — P. 41–72.

[31] C. S. Seshadri. Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques // Astérisque. — 1982. — **96**.

Наукове видання

Праці Інститут математики

НАН України

Т. 81

Ю.А. Дрозд

ВЕКТОРНІ РОЗШАРУВАННЯ

НАД ПРОЕКТИВНИМИ КРИВИМИ

Комп'ютерна верстка та підготовка оригінал-макета
Ю.А. Дрозд

Текст подано в авторській редакції.

Підп. до друку 30.06.2010. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк
Фіз. друк. арк. 8,0. Ум. друк. арк. 7,44. Зам. № . Тираж 300 пр.

Ін-т математики НАН України
01601 Київ, МСП, вул. Терещенківська, 3