Функциональный анализ и его приложения,
1989, т. 23, вып. 3, 57—58

УДК 512.554.3

НЕПРИВОДИМЫЕ ВЕСОВЫЕ sl(3)-МОДУЛИ

Ю. А. Дрозд, С. А. Овсиенко, В. М. Футорный

Цель настоящей работы — описать строение одного класса неприводимых модулей над алгеброй Ли $\mathfrak{G} = \mathrm{sl}(3, \mathbf{C})$, содержащего, в частности, все неприводимые модули Хариш-Чандры относительно подалгебры Картана. Используются методы и результаты [1; 2].

Пусть $\Delta = \{\alpha, \beta\}$ — базис системы корней R алгебры $\mathfrak{G}$, $\{X_\varphi, H_\gamma \mid \varphi \in R, \gamma \in \Delta\}$ — стандартный базис Шевалле в $\mathfrak{G}$. Подалгеброй Гельфанда — Цетлина назовем коммутативную подалгебру $\Lambda \subset U(\mathfrak{G})$, порожденную элементами c_i $(i = \overline{1, 5})$, где c_1, c_2 — образующие центра $U(\mathfrak{G})$ [2], $c_3 = H_\alpha$, $c_4 = H_\beta$, $c_5 = H_\alpha^2 - 2H_\alpha + 4X_\alpha X_{-\alpha}$ — элемент Казимира подалгебры $\langle X_\alpha, X_{-\alpha}, H_\alpha\rangle \simeq \mathrm{sl}(2, \mathbf{C})$.

Обозначим K категорию таких $\mathfrak{G}$-модулей V, которые допускают корневое разложение относительно подалгебры Гельфанда — Цетлина: $V = \bigoplus_{\chi \in \hat{\Lambda}} V(\chi)$, где $V(\chi) = \{v \in V \mid \forall i = \overline{1, 5}\ \exists l_i \in \mathbf{N}\colon (c_i - \chi(c_i))^{l_i} v = 0\}$, причем все подпространства $V(\chi)$ конечномерны. Очевидно, K содержит все конечномерные неприводимые $\mathfrak{G}$-модули, для которых указанное разложение задается базисом Гельфанда — Цетлина [3].

Для дальнейшего удобно рассмотреть сюръекцию $\pi\colon \mathbf{C}^5 \to \hat{\Lambda}$, где $\pi(z)$ для $z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ — это характер, переводящий c_i в z_i при $i = \overline{1, 4}$, а c_5 — в $z_5^2 - 1$. Обозначим через L подгруппу в $\mathbf{C}^5$, порожденную векторами $(0, 0, 2, -1, 0)$, $(0, 0, 1, -2, 1)$, $(0, 0, 1, -2, -1)$, и введем на $\hat{\Lambda}$ отношение эквивалентности, считая $\chi \sim \chi'$, если найдутся $z, z' \in \mathbf{C}^5$ такие, что $\chi = \pi(z)$, $\chi' = \pi(z')$ и $z - z' \in L$. Положим $D = \hat{\Lambda}/\sim$.

Носителем модуля V назовем множество $\mathrm{supp}\, V = \{\chi \in \hat{\Lambda} \mid V(\chi) \neq 0\}$. Пусть $K(d) = \{V \in K \mid \mathrm{supp}\, V \subset d\}$ для $d \in D$.

П р е д л о ж е н и е 1. $K = \bigoplus_{d \in D} K(d)$.

В частности, всякий неприводимый модуль из K лежит в каком-то $K(d)$.

Т е о р е м а 1. *Для любого $d \in D$ в категории $K(d)$ есть лишь конечное число классов изоморфизма неприводимых модулей.*

Для $\chi \in \hat{\Lambda}$ обозначим $J(\chi)$ число классов изоморфизма таких неприводимых модулей $V \in K$, что $V(\chi) \neq 0$.

Т е о р е м а 2. *Пусть $\chi = \pi(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$. Тогда:*

1) *если $z_5 \notin \mathbf{Z}$, то $J(\chi) = 1$, и если V — такой неприводимый модуль из K, что $V(\chi) \neq 0$, то для любого $\chi' \in \mathrm{supp}\, V$ пространство $V(\chi')$ одномерно;*

2) *если $z_5 \in \mathbf{Z}$, то $1 \leqslant J(\chi) \leqslant 2$, и если V — такой неприводимый модуль из K, что $V(\chi) \neq 0$, то $\dim V(\chi') \leqslant 2$ для любого χ'.*

Т е о р е м а 3. *В $\mathbf{C}^5$ есть всюду плотное подмножество Σ (выделяемое счетным числом полиномиальных неравенств) такое, что если $z \in \Sigma$, а $\chi = \pi(z) \in d$, где $d \in D$, то:*

1) *$K(d)$ содержит ровно один (с точностью до изоморфизма) неприводимый модуль V_d;*

2) $\mathrm{supp}\, V_d = d$;

3) *если $z' = (z_1', z_2', z_3', z_4', z_5')$ и $\chi' = \pi(z') \in d$, то*

$$\dim V_d(\chi') = \begin{cases} 1, & \text{если } z_5' \notin \mathbf{Z}\setminus\{0\}. \\ 2, & \text{если } z_5' \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}. \end{cases}$$

З а м е ч а н и я: 1. Можно проверить, что если в неприводимом $\mathfrak{G}$-модуле V есть хотя бы один вектор, собственный для всех c_i $(i = \overline{1, 5})$, то V допускает корневое разложение относительно подалгебры Гельфанда — Цетлина, причем если $V(\chi)$ конечномерно хотя бы для одного $\chi \in \mathrm{supp}\, V$, то и все $V(\chi')$ конечномерны.

2. Если $V \in K$ неприводим, то элементы c_i $(i = \overline{1, 4})$ действуют скалярно на каждом $V(\chi)$. Однако если $\dim V(\chi) = 2$, то c_5 действует на $V(\chi)$ как двумерная клетка Жордана.

3. Существуют такие характеры χ, для которых $J(\chi) = 2$, т. е. есть два неизоморфных неприводимых модуля V и V' таких, что $V(\chi) \neq 0$ и $V'(\chi) \neq 0$. Например, такими являются характеры $\chi_n = \pi(z_n)$, $n > 1$, где $z_n = ((4n^2 - 6n - 1)/24,\ 3(2n^2 - 3n + 1)/4, 0, 0, 2)$.

4. Для неприводимых модулей из категории K можно дать явные формулы, описывающие действие элементов X_φ $(\varphi \in R)$ и обобщающие формулы Гельфанда — Цетлина [3].

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту, чьи замечания вызвали существенное улучшение изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дрозд Ю. А.* // Вестн. Киевск. ун-та. Мат., мех.—1983. Вып. 25.— С. 70—77. 2. *Футорный В. М.* // Укр. мат. жур.—1986. Т. 38, № 4.— С. 492—497. 3. *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1980.

Киевский государственный
университет им. Т. Г. Шевченко

Поступило в редакцию
8 августа 1988 г.