ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
33 (1969), 1080—1088

УДК 519.49

Ю. А. ДРОЗД

АДЕЛИ И ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Для изучения целочисленных представлений, принадлежащих одному роду, применяется техника аделей. Изучается стабильное строение родов и доказывается, что если L — такое представление полупростого Z-кольца, в разложение которого над полем рациональных чисел каждое прямое слагаемое входит не менее двух раз, M и N — представления рода L, то из $M \oplus L^n \simeq N \oplus L^n$ следует $M \simeq N$. Для представлений полупростого Z-кольца Λ дается оценка числа представлений в любом роде, зависящая только от рациональной алгебры $\widetilde{\Lambda} = \Lambda \otimes Q$ и показателя группы Λ' / Λ, где Λ' — некоторое максимальное надкольцо Λ.

Как известно [см. напр. ([1])], нахождение целочисленных представлений произвольного Z-кольца Λ (т. е. кольца с единицей, аддитивная группа которого есть свободная абелева группа конечного ранга, или решетка) распадается фактически на два этапа: нахождение p-адических представлений кольца Λ и изучение представлений, принадлежащих одному роду, т. е. эквивалентных p-адически по всем p. Последняя задача нетривиальна даже для простейших с точки зрения теории целочисленных представлений колец. Так, если Λ есть кольцо целых чисел некоторого поля алгебраических чисел, то эта задача равносильна вычислению группы классов идеалов этого поля. В общем случае о строении родов известно довольно мало. Наибольший интерес представляет работа А. В. Ройтера ([2]), в которой показано, что если Z-кольцо Λ полупросто (в смысле Джекобсона), то число целочисленных представлений кольца Λ, принадлежащих одному роду, не превосходит некоторой константы, зависящей только от Λ.

В настоящей статье для изучения строения родов применяется обычная в теории алгебраических чисел техника аделей. Идея такого подхода принадлежит Д. К. Фаддееву ([3]). Наряду с этим используются некоторые результаты Х. Басса по стабильной теории ([4]).

В § 1 вводятся основные определения и формулируется ряд результатов работ ([3]) и ([4]), используемых в дальнейшем.

§ 2 посвящен исследованию стабильного строения модулей некоторого рода $\{L\}$. Основным результатом здесь является теорема о том, что если L — представление полупростого Z-кольца, причем в его разложение над полем рациональных чисел каждая неприводимая компонента входит не менее двух раз, то стабильные классы рода $\{L\}$ совпадают с классами эквивалентности, т. е. если M и N — представления этого рода и $M \oplus L \simeq N \oplus L$, то $M \simeq N$.

Наконец, в § 3 изучение представлений, принадлежащих одному роду, для полупростых Z-колец расчленяется на две части. Первая из них — изучение представлений максимальных Z-колец — ввиду работ М. Эйхлера [5] — [8] сводится к теоретико-числовым задачам, в частности, к вычислению группы классов идеалов полей алгебраических чисел. Вторая же часть — переход от максимальных колец к немаксимальным — носит чисто локальный характер и допускает сравнительно простое описание. Пользуясь этим, удается получить новое доказательство теоремы А. В. Ройтера об ограниченности числа модулей в роде.

Большинство этих результатов имеет место и для представлений над произвольным дедекиндовым кольцом $\mathfrak{o}$. В связи с этим приходится несколько видоизменить определение аделей, принятое в теории чисел [см., например [9]], учитывая только $\mathfrak{p}$-адические нормирования. Однако нетрудно проверить, что если кольцо $\mathfrak{o}$ есть кольцо целых алгебраических чисел, то рассмотрение обычных аделей не вносит никаких изменений в результаты настоящей статьи.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю И. Р. Шафаревичу.

§ 1. Определения и предварительные результаты

Всюду в дальнейшем $\mathfrak{o}$ будет обозначать дедекиндово кольцо, k—его поле частных. Напомним [3], что $\mathfrak{o}$-решеткой называется конечнопорожденный $\mathfrak{o}$-модуль без кручения. Если на $\mathfrak{o}$-решетке Λ введено умножение, превращающее ее в ассоциативную $\mathfrak{o}$-алгебру с единицей, то Λ называется $\mathfrak{o}$-кольцом, а (правые) Λ-модули, которые как $\mathfrak{o}$-модули являются $\mathfrak{o}$-решетками,— модулями представлений. Для всякого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{o}$ определено поле $\mathfrak{p}$-адических чисел $k_\mathfrak{p}$ и в нем — кольца целых $\mathfrak{p}$-адических чисел $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. Определим кольцо аделей $\widetilde{A}$ кольца $\mathfrak{o}$ как подкольцо прямого произведения $\prod\limits_{\mathfrak{p}} k_\mathfrak{p}$, состоящее из таких наборов $(a_\mathfrak{p})$, что $a_\mathfrak{p} \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ для почти всех $\mathfrak{p}$, т. е. для всех $\mathfrak{p}$, кроме конечного числа. Адели, все компоненты которых принадлежат $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, образуют в $\widetilde{A}$ подкольцо A целых аделей. Поле k естественно вкладывается в $\widetilde{A}$: элемент $x \in k$ отождествляется с аделем, все компоненты которого равны x.

Для всякой решетки L естественные вложения колец индуцируют вложения: $L \to \widetilde{L} = L \otimes k$; $L \to L_\mathfrak{p} = L \otimes \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$; $L_\mathfrak{p} \to \widetilde{L}_\mathfrak{p} = L \otimes k_\mathfrak{p}$; $\widetilde{L} \to \widetilde{L}_A = L \otimes \widetilde{A}$ и $L \to L_A = L \otimes A$ (тензорное произведение всюду берется над кольцом $\mathfrak{o}$). Эти вложения совместимы со структурами $\mathfrak{o}$-кольца или модуля представления, которые могут быть определены на L. Если Λ является $\mathfrak{o}$-кольцом, то кольцо $\widetilde{\Lambda}_A$ называется его кольцом аделей, а группа $\widetilde{\Lambda}_A^*$ обратимых элементов кольца $\widetilde{\Lambda}_A$ — группой иделей $\mathfrak{o}$-кольца Λ. Очевидно, кольцо $\widetilde{\Lambda}_A$ и группа $\widetilde{\Lambda}_A^*$ зависят только от k-алгебры $\widetilde{\Lambda}$. В группе иделей выделяются подгруппы $\widetilde{\Lambda}^*$ и Λ_A^*, которые называются, соответственно, группами главных и Λ-единичных иделей.

Для любого модуля представления L можно рассмотреть его род $\{L\}$, т. е. совокупность классов изоморфизма таких модулей представлений M, что $M_\mathfrak{p} \simeq L_\mathfrak{p}$ для всех $\mathfrak{p}$. Модули рода $\{L\}$ можно рассматривать как подрешетки в $\widetilde{L}$. В статье Д. К. Фаддеева (3) доказываются следующие утверждения, устанавливающие связь между группами иделей и модулями, принадлежащими к одному роду.

Предложение 1.1 *Пусть* L — *такая* $\mathfrak{o}$-*решетка, что для каждого* $\mathfrak{p}$ *в* $\widetilde{L}_\mathfrak{p}$ *задана* $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-*решетка* $M_\mathfrak{p}$, *причем* $\widetilde{M}_\mathfrak{p} = \widetilde{L}_\mathfrak{p}$ *и для почти всех* $\mathfrak{p}$ $M_\mathfrak{p} = L_\mathfrak{p}$. *Тогда в* $\widetilde{L}$ *есть* $\mathfrak{o}$-*решетка* N *такая, что* $N_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}$ *для всех* $\mathfrak{p}$. *Кроме того, если* L *является* $\mathfrak{o}$-*кольцом или модулем представления некоторого* $\mathfrak{o}$-*кольца* Λ, *а* $M_\mathfrak{p}$, *соответственно, есть* $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-*кольцо или модуль представления* $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-*кольца* $\Lambda_\mathfrak{p}$ *для всех* $\mathfrak{p}$, *то и* N *также является, соответственно* $\mathfrak{o}$-*кольцом или* Λ-*модулем представления.*

Пусть теперь L — модуль представления, $\Gamma = \operatorname{End} L$ — его кольцо эндоморфизмов. Тогда, очевидно, Γ является $\mathfrak{o}$-кольцом, причем $\widetilde{\Gamma}$ естественно отождествляется с $\operatorname{End} \widetilde{L}$, $\Gamma_\mathfrak{p}$ — с $\operatorname{End} L_\mathfrak{p}$, $\widetilde{\Gamma}_\mathfrak{p}$— с $\operatorname{End} \widetilde{L}_\mathfrak{p}$, $\widetilde{\Gamma}_A$—с $\operatorname{End} \widetilde{L}_A$ и Γ_A — с $\operatorname{End} L_A$. Пользуясь предложением 1.1, можно ввести естественное отображение $f: \widetilde{\Gamma}_A^* \to \{L\}$, ставя в соответствие иделю $(a_\mathfrak{p})$ такой модуль представления M, что $M_\mathfrak{p} = a_\mathfrak{p} L_\mathfrak{p}$ для всех $\mathfrak{p}$.

Предложение 1.2. *Отображение* f *индуцирует взаимно однозначное соответствие между родом* $\{L\}$ *и множеством классов смежности группы иделей* $\widetilde{\Gamma}_A^*$ *по двойному модулю: слева по подгруппе* $\widetilde{\Gamma}^*$ *главных иделей и справа по подгруппе* Γ_A^* Γ-*единичных иделей.*

Следствие 1.3. *Существует взаимно однозначное соответствие между родом* $\{L\}$ *и родом* $\{\Gamma\}$.

Род $\{\Gamma\}$ называется главным родом $\mathfrak{o}$-кольца Γ. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между родом модуля L и главным родом его кольца эндоморфизмов.

Предложение 1.4. *Для любого иделя* $(a_\mathfrak{p}) \in \widetilde{\Gamma}_A^*$ *и любого множества (конечного)* S *простых идеалов кольца* $\mathfrak{o}$ *найдется такой главный идель* $x \in \widetilde{\Gamma}^*$, *что* $(xa_\mathfrak{p}) \in \Gamma_A$ *и, кроме того,* $xa_\mathfrak{p} \in \Gamma_\mathfrak{p}^*$ *при* $\mathfrak{p} \in S$.

Нам понадобятся также некоторые результаты Х. Басса (4). Для произвольного кольца с единицей R обозначим через $M_n(R)$ матричную алгебру n-го порядка и через $G_n(R) = M_n(R)^*$ — линейную группу n-го порядка над кольцом R. В $G_n(R)$ рассмотрим подгруппу $E_n(R)$, порожденную всеми элементарными матрицами, т. е. матрицами вида $1 + ae_{ij}$, $a \in R$, $i \neq j$. Обозначим через $G_n(R, \mathfrak{q})$ ядро естественного гомоморфизма $G_n(R) \to G_n(R/\mathfrak{q})$, где $\mathfrak{q}$ — двусторонний идеал в R, и через $E_n(R, \mathfrak{q})$ — нормальный делитель в $E_n(R)$, порожденный всеми элементарными матрицами, принадлежащими $G_n(R, \mathfrak{q})$. Если $\mathfrak{q} = R$, то $G_n(R, \mathfrak{q}) = G_n(R)$, а $E_n(R, \mathfrak{q}) = E_n(R)$. Существуют естественные вложения σ_n: $G_n(R) \to G_{n+1}(R)$, где

$$\sigma_n(X) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы будем отождествлять $G_n(R)$ с $\operatorname{Im} \sigma_n$. При этом, очевидно, $G_n(R, \mathfrak{q}) \subset G_{n+1}(R, \mathfrak{q})$ и $E_n(R, \mathfrak{q}) \subseteq E_{n+1}(R, \mathfrak{q})$. Из результатов (4) непосредственно вытекает следующее утверждение.

Предложение 1.5. *Пусть R обозначает одно из колец $\widetilde{\Gamma}$, $\Gamma_{\mathfrak{p}}$, $\widetilde{\Gamma}_{\mathfrak{p}}$, $\widetilde{\Gamma}_A$ или Γ_A, где Γ — некоторое $\mathfrak{o}$-кольцо. Тогда*:

(а) $G_n(R, \mathfrak{q}) = G_{n-1}(R, \mathfrak{q})E_n(R, \mathfrak{q})$ *при* $n \geqslant 2$:

(б) $E_2(R, \mathfrak{q}) \supset [G_2(R), G_2(R, \mathfrak{q})]$;

(в) $E_n(R, \mathfrak{q}) = [G_n(R), G_n(R, \mathfrak{q})]$ *при* $n \geqslant 3$; *в частности, при* $n \geqslant 2$ $E_n(R, \mathfrak{q})$ — *нормальный делитель в* $G_n(R)$.

§ 2. Стабильное строение родов

Пусть L есть модуль представления некоторого $\mathfrak{o}$-кольца, $\Gamma = \operatorname{End} L$. Определим отображения φ_n^L: $\{L^n\} \to \{L^{n+1}\}$, где L^n — прямая сумма n экземпляров модуля L, положив $\varphi_n^L(M) = M \oplus L$. Так как $\operatorname{End} L^n = M_n(\Gamma)$ и группа иделей $\mathfrak{o}$-кольца $M_n(\Gamma)$ есть $G_n(\widetilde{\Gamma}_A)$, то, по предложению 1.2, существует отображение f_n: $G_n(\widetilde{\Gamma}_A) \to \{L^n\}$, индуцирующее взаимно однозначное соответствие между $\{L^n\}$ и множеством H_n классов смежности $G_n(\widetilde{\Gamma}_A)$ по двойному модулю: справа по $G_n(\Gamma_A)$ и слева по $G_n(\widetilde{\Gamma})$. Аналогично, так как $\operatorname{End} \Gamma^n = M_n(\Gamma)$, то существует отображение g_n: $G_n(\widetilde{\Gamma}_A) \to \{\Gamma^n\}$, индуцирующее взаимно однозначное соответствие между $\{\Gamma^n\}$ и H_n. Поэтому $g_n = \alpha_n \circ f_n$, где α_n — взаимно однозначное отображение $\{L^n\} \to \{\Gamma^n\}$.

Отображение φ_n^L просто связано с введенным в § 1 гомоморфизмом: σ_n: $G_n(\widetilde{\Gamma}_A) \to G_{n+1}(\widetilde{\Gamma}_A)$. Именно, $\varphi_n^L \circ f_n = f_{n+1} \circ \sigma_n$. Точно так же $\varphi_n^\Gamma \circ g_n = g_{n+1} \circ \sigma_n$, поэтому $\alpha_{n+1} \circ \varphi_n^L = \varphi_n^\Gamma \circ \alpha_n$, откуда $\varphi_n^L = \alpha_{n+1}^{-1} \circ \varphi_n^\Gamma \circ \alpha_n$. Но известно ([4]), что φ_n^Γ сюръективно при $n \geqslant 1$ и инъективно при $n \geqslant 2$. Отсюда следует

Предложение 2.1. *Отображение φ_n^L сюръективно при $n \geqslant 1$ и инъективно при $n \geqslant 2$.*

Два модуля M и N из рода $\{L\}$ назовем стабильно эквивалентными, если $M \oplus L^n \simeq N \oplus L^n$ для некоторого n. Совокупность модулей, стабильно эквивалентных модулю M, образует стабильный класс $[M]$ модуля M. Совокупность стабильных классов рода $\{L\}$ мы будем обозначать $K(L)$.

Следствие. 2.2. (а) $[M] = [N]$ *тогда и только тогда, когда* $M \oplus L \simeq N \oplus L$;

(б) $K(L^n) = \{L^n\}$ *при* $n \geqslant 2$;

(в) *отображение φ_n^L индуцирует взаимно однозначное соответствие* $\overline{\varphi}_n^L$: $K(L^n) \to K(L^{n+1})$ *для всех* $n \geqslant 1$.

Предложение 2.3. *$K(L^n)$ есть абелева группа относительно умножения $[M][N] = \psi_n^{-1}([M \oplus N])$, где $\psi_n = \overline{\varphi}_1^{L^n}$, а отображения $\overline{\varphi}_n^L$ являются изоморфизмами групп.*

Доказательство. Очевидно, определение произведения стабильных классов корректно, т. е. не зависит от выбора представителей, и так введенное умножение коммутативно и ассоциативно, а класс $[L^n]$ служит относительно него единицей. Кроме того, если M — произвольный модуль из рода $\{L^n\}$, то $L^n \oplus L^n \in \{M^2\}$ и потому существует модуль $M' \in \{M\} = \{L^n\}$ такой, что $M' \oplus M \simeq L^n \oplus L^n$. Класс $[M']$ является тогда обратным к $[M]$.

Для проверки последнего утверждения воспользуемся очевидным равенством $\psi_n = \overline{\varphi}_{2n-1}^L \circ \ldots \circ \overline{\varphi}_{n+1}^L \circ \overline{\varphi}_n^L$, откуда $\psi_{n+1}^{-1} = \overline{\varphi}_n^L \circ \psi_n^{-1} \circ (\overline{\varphi}_{2n}^L)^{-1} \circ (\overline{\varphi}_{2n+1}^L)^{-1}$. Тогда $\bar{\varphi}_n^L([M])\bar{\varphi}_n^L([N]) = [M \oplus L][N \oplus L] = \psi_{n+1}^{-1}([M \oplus N \oplus L \oplus L]) = \bar{\varphi}_n^L \circ \circ \psi_n^{-1}([M \oplus N]) = \bar{\varphi}_n^L([M][N])$, т. е. $\bar{\varphi}_n^L$ — гомоморфизм и потому изоморфизм.

Следствие 2.4. *Если M, N — модули из рода $\{L\}$, L' — модуль из рода $\{L^n\}$, причем $M \oplus L' \simeq N \oplus L'$, то $[M] = [N]$.*

Предложение 2.5. *Отображение α_n индуцирует изоморфизм групп $\bar{\alpha}_n$: $K(L^n) \simeq K(\Gamma^n)$.*

Доказательство следует из перестановочности α_n и φ_n.

В частности, $K(L) \simeq K(\Gamma)$ есть группа Гротендика локально свободных Г-модулей. Группа $K(L)$ была рассмотрена А. В. Ройтером (2) под названием группы γ-классов рода $\{L\}$ (следствие 2.4 показывает, что $K(L)$ совпадает и с группой β-классов в смысле (2)).

Отображения f_n и g_n индуцируют отображения $\bar{f}_n$: $G_n(\tilde{\Gamma}_A) \to K(L^n)$ и $\bar{g}_n$: $G_n(\tilde{\Gamma}_A) \to K(\Gamma^n)$, причем $\bar{g}_n = \bar{\alpha}_n \circ \bar{f}_n$, а также $\bar{\varphi}_n^L \circ \bar{f}_n = \bar{f}_{n+1} \circ \circ \sigma_n$ и $\bar{\varphi}_n^\Gamma \circ \bar{g}_n = \bar{g}_{n+1} \circ \sigma_n$.

Предложение 2.6. *$\bar{f}_n$ есть гомоморфизм групп.*

Доказательство. Достаточно проверить, что $\bar{g}_1$ есть гомоморфизм. Пусть $a = (a_\mathfrak{p})$, $b = (b_\mathfrak{p})$ — элементы из $\tilde{\Gamma}_A^*$, M и N — соответствующие Г-модули главного рода, P — модуль, соответствующий иделю $ab = (a_\mathfrak{p} b_\mathfrak{p})$. Очевидно, достаточно показать, что $M \oplus N \simeq P \oplus \Gamma$. Пусть S — множество (конечное) всех тех простых идеалов $\mathfrak{p}$, для которых $b_\mathfrak{p} \notin \Gamma_\mathfrak{p}^*$. Для почти всех $\mathfrak{p}$ (во всяком случае, для всех $\mathfrak{p} \notin S$) $b_\mathfrak{p}\Gamma_\mathfrak{p} b_\mathfrak{p}^{-1} = \Gamma_\mathfrak{p}$. По предложению 1.1, существует $\mathfrak{o}$-кольцо Ω такое, что для всех $\mathfrak{p}$ $\Omega_\mathfrak{p} = b_\mathfrak{p}\Gamma_\mathfrak{p} b_\mathfrak{p}^{-1} \cap \Gamma_\mathfrak{p}$, и, по предложению 1.4, существует элемент $x \in \tilde{\Gamma}^*$ такой, что $xa \in \Omega_A$ и при $\mathfrak{p} \in S$ $xa_\mathfrak{p} \in \Omega_\mathfrak{p}^*$. Иделю xa соответствует модуль $M' \simeq M$, а иделю xab — модуль $P' \simeq P$, причем $P' \subset N$, а $M' \subset \Gamma$. При $\mathfrak{p} \notin S$ $N_\mathfrak{p} = \Gamma_\mathfrak{p}$ и $P'_\mathfrak{p} = M'_\mathfrak{p}$, а при $\mathfrak{p} \in S$ $N_\mathfrak{p} = P'_\mathfrak{p}$ и $\Gamma_\mathfrak{p} = M'_\mathfrak{p}$, поэтому при всех $\mathfrak{p}$ $N_\mathfrak{p}/P'_\mathfrak{p} \simeq \Gamma_\mathfrak{p}/M'_\mathfrak{p}$, откуда следует, что $N/P' \simeq \Gamma/M'$. Но так как модули N, P', Γ и M' проективны, то, по теореме Шануэля [см., например, (2)], $N \oplus M' \simeq P' \oplus \Gamma$, что и требовалось доказать.

Очевидно, при отображении $\bar{f}_n$, $n \geqslant 2$, в единицу группы $K(L^n) = \{L^n\}$, т. е. в класс $[L^n]$, переходит множество $G_n(\tilde{\Gamma})G_n(\Gamma_A)$. Пользуясь китайской теоремой об остатках [см., например, (9)], нетрудно проверить, что это множество содержит все элементарные матрицы из $G_n(\tilde{\Gamma}_A)$.

Следствие 2.7. *При $n \geqslant 2$*

(а) *$G_n(\tilde{\Gamma})G_n(\Gamma_A)$ есть подгруппа в $G_n(\tilde{\Gamma}_A)$, содержащая $E_n(\tilde{\Gamma}_A)$, а $\bar{f}_n$ устанавливает изоморфизм $G_n(\tilde{\Gamma}_A)/G_n(\tilde{\Gamma})G_n(\Gamma_A) \simeq K(L^n)$;*

(б) $G_{n+1}(\tilde{\Gamma})G_{n+1}(\Gamma_A) \cap G_n(\tilde{\Gamma}_A) = G_n(\tilde{\Gamma})G_n(\Gamma_A)$.

Если $L' \in \{L\}$ соответствует иделю $(a_\mathfrak{p})$, $\Gamma' = \operatorname{End} L'$, то $\Gamma'_\mathfrak{p} = a_\mathfrak{p}\Gamma_\mathfrak{p} a_\mathfrak{p}^{-1}$, откуда следует, что $G_n(\Gamma_A)$ и $G_n(\Gamma'_A)$ сопряжены в $G_n(\tilde{\Gamma}_A)$.

Следствие 2.8. *Если $\{L'\} = \{L\}$, то $K(L') \simeq K(L)$.*

Пусть $\mathfrak{q}$ — произвольный идеал кольца $\mathfrak{o}$. Если R — такое кольцо, что $\mathfrak{o}$ содержится в центре R, то $\mathfrak{q}R$ — двусторонний идеал в R и потому определены группы $G_n(R, \mathfrak{q}R)$ и $E_n(R, \mathfrak{q}R)$, которые мы будем обозначать просто $G_n(R, \mathfrak{q})$ и $E_n(R, \mathfrak{q})$.

Если Λ — некоторое $\mathfrak{o}$-кольцо, то в нем есть подкольцо $\Lambda^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}\Lambda + \mathfrak{o}$, причем, очевидно, $G_n(\Lambda_A^{\mathfrak{q}}) \supset G_n(\Lambda_A, \mathfrak{q})$ и $G_n(\Lambda_A^{\mathfrak{q}}) \subset G_n(A) G_n(\Lambda_A, \mathfrak{q})$.

Предложение 2.9. *При всех* $n \geqslant 1$

$$G_n(A) \subset G_n(k) G_n(A, \mathfrak{q}).$$

Доказательство. Из китайской теоремы об остатках непосредственно следует, что $A^* = G_1(A) \subset G_1(k) G_1(A, \mathfrak{q})$, а также, что при $n \geqslant 2$ $E_n(A) = E_n(\mathfrak{o}) E_n(A, \mathfrak{q})$. Но тогда, по предложению 1.5, при $n \geqslant 2$ имеем: $G_n(A) = E_n(A) G_1(A) = E_n(\mathfrak{o}) E_n(A, \mathfrak{q}) G_1(A) = E_n(\mathfrak{o}) G_1(A) E_n(A, \mathfrak{q}) \subset$ $\subset E_n(\mathfrak{o}) G_1(k) G_1(A, \mathfrak{q}) E_n(A, \mathfrak{q}) \subset G_n(k) G_n(A, \mathfrak{q})$.

Следствие 2.10. (а) $G_n(\widetilde{\Lambda}) G_n(\Lambda_A, \mathfrak{q}) = G_n(\widetilde{\Lambda}) G_n(\Lambda_A^{\mathfrak{q}})$, *а при* $n \geqslant 2$

(б) $G_n(\widetilde{\Lambda}) G_n(\Lambda_A, \mathfrak{q})$ — *подгруппа в* $G_n(\widetilde{\Lambda}_A)$, *содержащая* $E_n(\widetilde{\Lambda}_A)$;

(в) $G_{n+1}(\widetilde{\Lambda}) G_{n+1}(\Lambda_A, \mathfrak{q}) \cap G_n(\widetilde{\Lambda}_A) = G_n(\widetilde{\Lambda}) G_n(\Lambda_A, \mathfrak{q})$.

Зафиксируем теперь некоторое $\mathfrak{o}$-кольцо Λ и предположим, что алгебра $\widetilde{\Lambda}$ полупроста. Такие $\mathfrak{o}$-кольца мы будем называть полупростыми. В них нет нильпотентных идеалов, и, следовательно, они полупросты в смысле Бэра, а в интересующем нас случае, когда кольцо $\mathfrak{o}$ имеет бесконечно много простых идеалов, они полупросты и в смысле Джекобсона. Для всякого Λ-модуля представления L имеет место разложение $\widetilde{L} = B_1^{t_1} \oplus \ldots \oplus B_r^{t_r}$, где $B_1, \ldots, B_r$ — все различные неприводимые $\widetilde{\Lambda}$-модули (возможно, некоторые t_i равны нулю). Мы будем тогда писать $\widetilde{L} = (t_1, \ldots, t_r)$. Если $\Gamma =$ $= \operatorname{End} L$, то $\widetilde{\Gamma} = M_{t_1}(D_1) \oplus \ldots \oplus M_{t_r}(D_r)$, где $D_i = \operatorname{End} B_i$ — конечномерные над k тела.

Фиксируем в каждом теле D_i какое-либо $\mathfrak{o}$-кольцо Δ_i такое, что $\widetilde{\Delta}_i =$ $= D_i$, и положим $\Omega = M_{t_1}(\Delta_1) \oplus \ldots \oplus M_{t_r}(\Delta_r)$. Рассмотрим идеал $\mathfrak{q} = \operatorname{Ann}_{\mathfrak{o}} \Omega / \Omega \cap \Gamma$. Очевидно, $\mathfrak{q} \neq 0$ и $\mathfrak{q}\Omega \subset \Gamma$. Поэтому, в частности, $G_n(\Gamma_A) \supset G_n(\Omega_A, \mathfrak{q})$. Но $G_n(\Omega_A) = \prod_{i=1}^{r} G_{nt_i}(\Delta_{i_A})$ и $G_n(\Omega_A, \mathfrak{q}) = \prod_{i=1}^{r} G_{nt_i}(\Delta_{i_A}, \mathfrak{q})$, откуда, учитывая следствие 2.10, мы получаем

Предложение 2.11. *Если для всех* $i = 1, \ldots, r$ *либо* $t_i = 0$, *либо* $t_i \geqslant 2$, *то при любом* $n \geqslant 1$:

(а) $G_n(\widetilde{\Gamma}) G_n(\Gamma_A)$ — *подгруппа в* $G_n(\widetilde{\Gamma}_A)$, *содержащая* $\prod_{i=1}^{r} E_{nt_i}(\widetilde{\Delta}_{i_A})$;

(б) $G_{n+1}(\widetilde{\Gamma}) G_{n+1}(\Gamma_A) \cap G_n(\widetilde{\Gamma}_A) = G_n(\widetilde{\Gamma}) G_n(\Gamma_A)$.

Из этого предложения непосредственно следует основная теорема о стабильных классах для представлений полупростых $\mathfrak{o}$-колец.

ТЕОРЕМА 2.12. *Если* L — *модуль представления полупростого* $\mathfrak{o}$-*кольца* Λ, *причем* $\widetilde{L} = (t_1, \ldots, t_r)$, *где для всех* i *либо* $t_i = 0$, *либо* $t_i \geqslant 2$, *то* $K(L) = \{L\}$, *т. е. модули рода* $\{L\}$, *принадлежащие одному стабильному классу, изоморфны.*

Известны примеры [см. например, ([10])], показывающие, что ограничение $t_i \geqslant 2$ существенно. Нетрудно, однако, показать, что это ограничение достаточно накладывать только на те i, для которых тело D_i некоммутативно.

Пользуясь результатами М. Эйхлера ([8]), можно показать также, что если k — поле алгебраических чисел, то условие $t_i \geqslant 2$ достаточно накладывать только на те i, для которых D_i является вполне определенной алгеброй кватернионов, т. е. четырехмерным телом над некоторым чисто вещественным полем k_i, причем таким, что для любого вложения k_i в поле вещественных чисел R алгебра $D_i \otimes_{k_i} R$ остается алгеброй с делением.

§ 3. Арифметический случай. Ограниченность числа модулей в роде для полупростых $\mathfrak{o}$-колец

В этом параграфе мы будем считать, что поле k — арифметическое, т. е. либо поле алгебраических чисел, либо поле алгебраических функций от одной переменной над конечным полем. Тогда число модулей $g\,(L)$ в любом роде $\{L\}$ конечно, как следует, например, из ([11]). Мы дадим оценку этого числа для модулей представлений полупростого $\mathfrak{o}$-кольца, из которой будет следовать, в частности, теорема об ограниченности числа $g\,(L)$, доказанная А. В. Ройтером ([2]).

Пусть Λ — полупростое $\mathfrak{o}$-кольцо, $B_1, \ldots, B_r$ — все различные неприводимые $\widetilde{\Lambda}$-модули; $D_i = \operatorname{End} B_i$ — конечномерные тела над k. Если L есть Λ-модуль представления, причем $\widetilde{L} = (t_1, \ldots, t_r)$, $\Gamma = \operatorname{End} L$, то $\widetilde{\Gamma} = M_{t_1}(D_1) \oplus \ldots \oplus M_{t_r}(D_r)$. Как известно [см., например ([3])], в алгебре $\widetilde{\Gamma}$ существуют максимальные $\mathfrak{o}$-кольца, т. е. такие $\mathfrak{o}$-кольца Γ', что $\widetilde{\Gamma}' = \widetilde{\Gamma}$ и Γ' не содержится ни в каком большем $\mathfrak{o}$-кольце с тем же свойством. При этом Γ содержится хотя бы в одном максимальном $\mathfrak{o}$-кольце, которое называется максимальным надкольцом $\mathfrak{o}$-кольца Γ. Если Ω — одно из таких колец, то обозначим $\mathfrak{q}\,(\Omega/\Gamma) = \operatorname{Ann}_{\mathfrak{o}} \Omega/\Gamma$; $\mathfrak{q}\,(\Omega/\Gamma)$ мы будем называть уровнем $\mathfrak{o}$-кольца Γ в максимальном надкольце Ω.

Предложение 3.1. [см. ([3])]. *Если L — модуль представления максимального $\mathfrak{o}$-кольца, $\Gamma = \operatorname{End} L$, то Γ — также максимальное $\mathfrak{o}$-кольцо.*

Следствие 3.2. *Пусть L — модуль представления полупростого $\mathfrak{o}$-кольца Λ, $\Gamma = \operatorname{End} L$, Λ' — максимальное надкольцо кольца Λ, $L' = L\Lambda'$, $\Gamma' = \operatorname{End} L'$. Тогда Γ' есть максимальное надкольцо кольца Γ, причем $\mathfrak{q}\,(\Gamma'/\Gamma)$ делит $\mathfrak{q}\,(\Lambda'/\Lambda)$.*

Предложение 3.3 [см. ([3])]. *Пусть $\widetilde{\Gamma} = M_{t_1}(D_1) \oplus \ldots \oplus M_{t_r}(D_r)$, Δ_i — некоторое максимальное $\mathfrak{o}$-кольцо в D_i. Тогда $M_{t_1}(\Delta_1) \oplus \ldots \oplus M_{t_r}(\Delta_r)$ есть максимальное $\mathfrak{o}$-кольцо в $\widetilde{\Gamma}$. Если Γ', Γ'' — два произвольных максимальных $\mathfrak{o}$-кольца в $\widetilde{\Gamma}$, то они локально сопряжены, т. е. для любого $\mathfrak{p}$ существует элемент $a_{\mathfrak{p}} \in \widetilde{\Gamma}_{\mathfrak{p}}^{*}$ такой, что $\Gamma'_{\mathfrak{p}} = a_{\mathfrak{p}} \Gamma''_{\mathfrak{p}} a_{\mathfrak{p}}^{-1}$.*

Следствие 3.4. (а) *Если Γ', Γ'' — два произвольных максимальных $\mathfrak{o}$-кольца в алгебре $\widetilde{\Gamma}$, то $g\,(\Gamma') = g\,(\Gamma'')$. Это общее значение мы будем обозначать $g\,(\widetilde{\Gamma})$.*

(б) *Если* $\Gamma = \operatorname{End} L$ — *максимальное* $\mathfrak{o}$-*кольцо в* $\widetilde{\Gamma}$, *то* $g(L) = g(\widetilde{\Gamma}) \leqslant \leqslant g(D_1) \ldots g(D_r)$.

Пусть теперь Λ' — некоторое фиксированное максимальное надкольцо полупростого $\mathfrak{o}$-кольца Λ, L — Λ-модуль представления. Обозначим через $\{L\}'$ совокупность классов изоморфизма таких Λ-модулей представлений M, что $M \in \{L\}$ и $M\Lambda' \simeq L\Lambda' = L'$, а через $g'(L)$ — число элементов в $\{L\}'$. Положим $\Gamma = \operatorname{End} L$, $\Omega = \operatorname{End} L'$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\Omega/\Gamma)$. Разложим $\mathfrak{q}$ в произведение простых идеалов: $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1^{n_1} \ldots \mathfrak{p}_s^{n_s}$, где $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ попарно различны. Ω^* вкладывается (диагональным образом) в $\prod_{i=1}^{s} \Omega^*_{\mathfrak{p}_i}$. Имеет место следующее утверждение, аналогичное предложению 1.2.

Предложение 3.5. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством* $\{L\}'$ *и множеством классов смежности группы* $\prod_{i=1}^{s} \Omega^*_{\mathfrak{p}_i}$ *по двойному модулю: слева по* Ω^* *и справа по* $\prod_{i=1}^{s} \Gamma^*_{\mathfrak{p}_i}$.

Для любого $\mathfrak{o}$-кольца Δ обозначим через $h_{\mathfrak{q}}(\Delta)$ число классов смежности группы $\prod_{i=1}^{s} \Delta^*_{\mathfrak{p}_i}$ по двойному модулю: слева по Δ^* и справа по $\prod_{i=1}^{s} G_1(\Delta_{\mathfrak{p}_i}, \mathfrak{p}_i^{n_i})$. Если Γ', Γ'' — два произвольных максимальных $\mathfrak{o}$-кольца в алгебре $\widetilde{\Gamma}$, то из их локальной сопряженности следует, что $h_{\mathfrak{q}}(\Gamma') = h_{\mathfrak{q}}(\Gamma'')$. Это общее значение мы будем обозначать $h_{\mathfrak{q}}(\widetilde{\Gamma})$. Учитывая, что $\Gamma^*_{\mathfrak{p}_i} \supset \supset G_1(\Omega_{\mathfrak{p}_i}, \mathfrak{p}_i^{n_i})$, и применяя те же рассуждения, что и в предыдущем параграфе, мы получим следующий результат.

Предложение 3.6. $g'(L) \leqslant h_{\mathfrak{q}}(\widetilde{\Gamma}) \leqslant h_{\mathfrak{q}}(D_1) \ldots h_{\mathfrak{q}}(D_r)$.

Обозначим через $g_{\mathfrak{q}}(\widetilde{\Gamma})$ произведение $h_{\mathfrak{q}}(\widetilde{\Gamma})\, g(\widetilde{\Gamma})$. Тогда, объединяя оценки предложения 3.6 и следствия 3.4 и учитывая следствие 3.2, мы получаем следующую оценку числа $g(L)$.

ТЕОРЕМА 3.7. *Пусть* Λ — *полупростое* $\mathfrak{o}$-*кольцо*, $D_1, \ldots, D_r$ — *тела, входящие в разложение алгебры* $\widetilde{\Lambda}$, Λ' — *произвольное максимальное надкольцо* Λ, $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\Lambda'/\Lambda)$. *Тогда для любого модуля представления* L *с кольцом эндоморфизмов* Γ

$$g(L) \leqslant g_{\mathfrak{q}}(\widetilde{\Gamma}) \leqslant g_{\mathfrak{q}}(D_1) \ldots g_{\mathfrak{q}}(D_r).$$

Очевидно, эта оценка зависит только от Λ, точнее, от алгебры $\widetilde{\Lambda}$ и уровня Λ в некотором его максимальном надкольце. Простые примеры показывают, что если учитывать только эти факторы, то оценка теоремы 3.7 является точной. Эта оценка аналогична той, которая дана в ([2]) (замечания 3), однако не совпадает с ней.

Замечание. Результаты о представлениях Z-колец, аналогичные изложенным в настоящей статье, получены несколько ранее Якобинским ([12]) с использованием существенно иных методов. В частности, Якобинский устанавливает более прямую и наглядную связь между родами $\{L\}$ и $\{\operatorname{End} L\}$, что представляет интерес с точки зрения изучения строения самих модулей. В дальнейшем рассуждении Якобинского опираются в основном на результаты Эйхлера. Такой подход, по-видимому, может дать в арифметическом случае более тонкую информацию, чем путь, принятый в настоящей статье, использующий более общие и потому, естественно, и более грубые результаты Басса. Однако использование результатов Басса должно быть предпочтительнее в общей ситуации, когда отсутствие арифметической специфики не дает возможности применить теоремы Эйхлера. Например, этот способ дает возможность обобщить теорему 2.12 (о стабильных классах) на случай порядков над произвольной областью целостности размерности Крулля 1.

Техника аделей, по-видимому, дает возможность объединить достоинства таких двух подходов, так как большинство результатов Эйхлера легко и естественно переводится на язык аделей.

Поступило
24.VI.1968

ЛИТЕРАТУРА

[1] Фаддеев Д. К., О полугруппе родов в теории целочисленных представлений, Изв. АН СССР, сер. матем., 28 (1964), 475—478.

[2] Ройтер А. В., О целочисленных представлениях, принадлежащих одному роду, Изв. АН СССР, сер. матем., 30 (1966), 1315—1324.

[3] Фаддеев Д. К., Введение в мультипликативную теорию модулей целочисленных представлений, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 80 (1965), 145—182.

[4] Bass H., K-theory and stable algebra, Publ. IHES, № 22 (1964).

[5] Eichler M., Bestimmung der Idealklassenzahl in gewissen normalen einfachen Algebren, J. reine und angew. Math., 176 (1937), 192—202.

[6] Eichler M., Über die Idealklassenzahl total definiter Quaternionenalgebren, Math. Z., 43 (1937), 102—109.

[7] Eichler M., Über die Idealklassenzahl hyperkomplexer Systeme, Math. Z., 43 (1938), 481—494.

[8] Eichler M., Allgemeine Kongruenzklasseneinteilungen der Ideale einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörpern und ihre L-Reihen, J. reine und angew. Math., 179 (1938), 227—251.

[9] Ленг С., Алгебраические числа, М., «Мир», 1966.

[10] Swan R. J., Projective modules over group rings and maximal orders, Ann. Math., 76 (1962), 55—61.

[11] Фаддеев Д. К., Об эквивалентности систем целочисленных матриц, Изв. АН СССР, сер. матем., 30 (1966), 449—454.

[12] Jacobinski H., Genera and decompositions of lattices over orders, Acta Math., 121 (1968), 1—29.