М.І. Сумарюк (Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна)

Вільні групи, що породжуються монотонними функціями

Серед усіх зображень вільних алгебраїчних структур тими чи іншими об'єктами, виділяються зображення певними функціями над полями нульової характеристики. Задача про побудову таких зображень виникла ще у першій половині XX століття. Зокрема, у 1949 році Б. Нейман довів [2], що у групі всіх дійсних строго монотонних функцій над $\mathbb{R}$ існує вільна підгрупа континуального рангу.

С. Уайт у роботі [4] доводить, що перетворення дійсного поля $x \to x+1$ та $x \to x^p$, де p – деяке фіксоване просте число, вільно породжують вільну групу. Пізніше С. Коеном в [1] результат С. Уайта дещо узагальнено.

К. Беннет в [3] вказує конкретні аналітичні задання набору $n > 1$ дійсних монотонних функцій над $\mathbb{R}$, які породжують вільну групу рангу n.

Ми доводимо таке твердження.

Теорема. *Нехай Φ – система строго монотонних функцій над деякою числовою множиною D, що задовольняє наступні умови:*

1) для довільних двох різних функцій φ_1, $\varphi_2 \in \Phi$ циклічні групи $< \varphi_1 >$ та $< \varphi_2 >$, породжені цими функціями, мають нескінченний порядок і перетинаються по тривіальній групі $< e >$, де e – тотожне перетворення множини D;

2) існує точка $x_0 \in D$, яка є нерухомою точкою для довільної функції $\varphi \in \Phi$;

3) кожна функція $\varphi \in \Phi$, є тричі диференційовною у точці x_0, крім того, $\varphi'(x_0) = 1$ та $\varphi''(x_0) \neq 0$.

Тоді група, породжена системою функцій Φ, є вільною групою відносно вільної бази Φ.

Застосувавши цю теорему у випадку конкретних функцій, отримуємо наступне твердження.

Лема. *Група, породжена функціями $f_1(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{3}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{4}{5}$, $x \in \mathbb{R}$, є вільною групою рангу 2 відносно вільної бази $\{f_1, f_2\}$.*

[1] Cohen S.D. The group of translations and positive rational powers is free // Quart. J. Math. Oxford. – 1995. – **46**, №2. – P. 21-93.

[2] Neumann B.H. On ordered groups // Amer. J. Math. – 1949. – **71**, №1-2. – P. 1-18.

[3] Bennett C.D. Explicit free subgroups of Aut(R, $\leq$). – Proc. Amer. Math. Soc. – 1997. – **125**, №5. – P. 1305-1308.

[4] White S. The group generated by $x \to x+1$ and $x \to x^p$ is free // Journal of Algebra. – 1988. – **118**. – P. 408-422.