А. А. Зевин (Институт транспортных систем и технологий НАН Украины, Украина)

Точные оценки периодических решений липшицевых дифференциальных уравнений

В основополагающей работе [1] Йорк нашел точную нижнюю границу ($T_0 = 2\pi/L$) периодов непостоянных решений уравнения $\dot{x} = f(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, а $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L . Задача построения точных верхних оценок амплитуд периодических решений неавтономных систем была впервые поставлена и решена в [2,3].

В данной работе рассмотрена система дифференциальных уравнений более общего вида, содержащая постоянное и переменное запаздывания:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\zeta), x(\tau(t)), t). \quad (1)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, функция $f(x, y, z, t)$ T -периодична по t и удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x', y', z', t') - f(x'', y'', z'', t'')| \leq L_1|x' - x''| + L_2|y' - y''| + L_3|z' - z''| + P(|t' - t''|), \quad (2)$$

где $|x| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$ – супремумная норма, L_i – константы Липшица, $P(t)$ – заданная функция, ζ – произвольная константа, $\tau(t)$ – любая кусочно-непрерывная функция.

Доказано, что при $P(t) \equiv 0$ период любого непостоянного решения $x(t) = x(t+T)$ удовлетворяет неравенству

$$T \geq T_0 = \frac{4}{L} \arcsin \left[\frac{(L_1 + L_2)(L_1 + L_2 + 2L_3)}{(L_1 + L_2 + L_3)^2 + L_3^2} \right]. \quad (3)$$

При $T < T_0$ и любом $n > 1$ наибольшая амплитуда T -периодического решения

$$A_* \leq \frac{L}{\Delta(T)} \int_0^{T/4} p_0(s) [\cos(L(T/4 - s)) + \sin(Ls)] ds, \quad (4)$$

где $p_0(t) = 0.5P(2t)$, $\Delta(T) = L \cos(LT/4) - L_3 [\sin(LT/4) - \cos(LT/4) + 1]$ и $L = L_1 + L_2$.

Построены системы линейных уравнений, в которых найденные оценки достигаются; при этом $\zeta = T/4$, а $\tau(t)$ – пилообразная $T/2$ -периодическая функция. При отсутствии в (1) членов с $x(t), x(t-\zeta)$ либо $x(\tau(t))$ достаточно в (3) и (4) приравнять нулю соответствующие константы L_i .

[1] Yorke J.A. Periods of periodic solutions and the Lipschitz constant // Proc. Amer. Math. Soc., 1969. – 22. P. 509-512.

[2] Зевин А.А. Точные оценки периодов и амплитуд периодических решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Докл.РАН, 2007. – 415. № 2. С.160-164.

[3] Зевин А.А. Точная оценка амплитуд периодических решений липшицевых дифференциальных уравнений // Докл.РАН, 2008. – 421. №6. С.733-737.