П.В. Задерей, Т.В. Задира (КНУТД, кафедра вищої математики, Київ, Україна)

Про відхилення $\bar{\psi}$–диференційованих періодичних функцій від лінійних середніх їх рядів Фур'є

Для узагальнених $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ похідних, введених О.І. Степанцем, і визначених з їх допомогою класів $C^{\bar{\psi}}_{\infty}$ розглядається задача Колмогорова–Нікольського для величин

$$\mathscr{E}(C^{\bar{\psi}}_{\infty}; U_n) = \sup_{f \in C^{\bar{\psi}}_{\infty}} \| f(x) - U_n(f;x) \|_C \quad ,)$$

де

$$U_n(f;x;\Lambda) = \frac{a_0 \lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), n = 1, 2, ...$$

Зокрема, для сум Фур'є $\lambda_k^{(n)} = 1,\ 0 \le k \le n;\ \ \lambda_k^{(n)} = 0,\ k > n$ встановлено асимптотичну рівність

$$\mathscr{E}_n(C^{\bar{\psi}}_{\infty}, S_n) = \frac{2}{\pi} \int_n^{\infty} \frac{|\psi_2(t)|}{t} dt + \frac{4}{\pi^2} \bar{\psi}(n) \ln n + O(1) \bar{\psi}(n),$$

де $\bar{\psi}(n) = (\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n))^{\frac{1}{2}}$, а $O(1)$–величина рівномірно обмежена по n. У випадку випуклих функцій $\psi_1(\cdot)$ і $\psi_2(\cdot)$ цей результат був одержаний О.І. Степанцем. А при $\psi_1(k) = \psi(k) cos \frac{\beta_k \pi}{2}$, $\psi_2(k) = \psi(k) sin \frac{\beta_k \pi}{2}$, тобто для класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, і за умов менш обмежених, ніж випуклість–П.В. Задереєм.

Теорема: Нехай виконуються умови

$$\lim_{k \to \infty} \psi_1(k) = 0, \ \lim_{k \to \infty} \psi_2(k) = 0 \ ,$$

ряд $S[K_n(t)] = K_n(\bar{\psi}; \Lambda; t) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda_k^{(n)})(\psi_1(k) \cos kx + \psi_2(k) \sin kx)$ є рядом Фур'є деякої функції з $L(2\pi)$, а також збігаються ряди: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(|\Delta \tau_k^{(n)}| + |\Delta \nu_k^{(n)}| \right)$,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l} (\Delta \tau_{k-l}^{(n)} - \Delta \tau_{k+l}^{(n)}) \right| + \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l} (\Delta \nu_{k-l}^{(n)} - \Delta \nu_{k+l}^{(n)}) \right| \right), \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\nu_k^{(n)}|}{k}.$$

Тоді $\forall n,\ m \in \mathbb{N}$ справедлива асимптотична рівність:

$$\mathscr{E}(C^{\bar{\psi}}_{\infty}, U_n) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \xi \left(\nu_k^{(n)}, \ \ \sqrt{(\tau_{m-k}^{(n)} - \tau_{m+k}^{(n)})^2 + (\nu_{m-k}^{(n)} - \nu_{m+k}^{(n)})^2} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2m+1}^{\infty} \frac{|\nu_k^{(n)}|}{k} + O(I_n + H_m),$$

де

$$I_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(|\Delta \tau_k^{(n)}| + |\Delta \nu_k^{(n)}| \right), H_m = \sum_{k=2}^{m-2} \left(\left| \sum_{l=1}^{r_{k,m}} \frac{1}{l} \left(\Delta \tau_{k-l}^{(n)} - \Delta \tau_{k+l}^{(n)} \right) \right| + \left| \sum_{l=1}^{r_{k,m}} \frac{1}{l} \left(\Delta \nu_{k-l}^{(n)} - \Delta \nu_{k+l}^{(n)} \right) \right| \right) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \left(\left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l} \left(\Delta \tau_{m+k-l}^{(n)} - \Delta \tau_{m+k+l}^{(n)} \right) \right| + \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l} \left(\Delta \nu_{m+k-l}^{(n)} - \Delta \nu_{m+k+l}^{(n)} \right) \right| \right).$$

При $\psi_1(k) = \frac{1}{k^r} \cos \frac{\beta \pi}{2}$, $\psi_2(k) = \frac{1}{k^r} \sin \frac{\beta \pi}{2}$ цей результат був одержаний С.О. Теляковським