

Ю.П.Вирченко(Белгородский государственный университет, Белгород, Россия)

Неподвижные точки кинетического уравнения теории фрагментации хрупких материалов в условиях самоподобия

Рассматривается система, состоящая из большого набора твердотельных фрагментов, которые имеют случайную форму и размер. Число фрагментов в каждый момент времени t случайно и его среднее значение определяется функцией $N(t)$. В рамках подхода А.Н.Колмогорова, состояние каждого из фрагментов в каждый момент времени, описывается одним параметром r – "обобщённым размером". Состояние же всей системы в целом описывается плотностью $g(r, t)$ распределения числа фрагментов по размерам. Изменение со временем плотности $g(r, t)$ подчинено кинетическому уравнению

$$\dot{g}(r, t) = \int_r^\infty K(r, r'; t)g(r', t)dr' - \mu(r, t)g(r, t) \equiv L[g](r, t),$$

где $\mu(r, t) = r^{-3} \int_0^r r'^3 K(r', r; t)dr'$. Эта связь обеспечивает сохранение в среднем полного объёма всех фрагментов.

Изучается автономный режим эволюции с самоподобным законом дробления $K(r, r'; t) = \gamma(t)K(r/r')r'^{\beta-1}$, $\beta > 0$, когда возможен переход к эффективной шкале времени $ds = \gamma(t)dt$.

$$\frac{\partial}{\partial s}g(r, s) = r^\beta \left(\int_1^\infty K(x^{-1})x^{\beta-1}g(xr, s)dx - \mu g(r, s) \right),$$

где $\beta = 0$ соответствует масштабно инвариантному дроблению, рассмотренному Колмогоровым.

Вводится плотность распределения $f(r, s) = g(r, s)/N(s)$ "вероятностей". Уравнение для этой плотности

$$\frac{\partial}{\partial s}f(r, s) = (L[f])(r, s) - f(r, s) \int_0^\infty (L[f])(r', s)dr'$$

уже не является линейным в отличие теории А.Н.Колмогорова и, поэтому, определяемое ею распределение вероятностей не соответствует марковскому процессу. Плотность обладает финальным поведением при $s \rightarrow \infty$, которое имеет вид

$$f(r, s) = \rho^{-1}(s)h(\rho^{-1}(s)r, s),$$

где $\rho(s) = \int_0^\infty r f(r, s) dr$ – средний размер фрагментов и плотность $h(x, s)$ удовлетворяет при $s \rightarrow \infty$ уравнению

$$\frac{\partial}{\partial s} h(x, s) + \kappa [xh(x, s)]' = (\mathbb{L}[h])(x, T) - \gamma h(x, s), \quad (1)$$

где постоянные $\kappa, \gamma > 0$ определяют тип асимптотики и при этом $\rho(s) = (1 + \beta \kappa s)^{-1/\beta}$.

С помощью преобразования Меллина

$$M(z, s) = \int_0^\infty x^{z-1} h(x, s) dx,$$

которое подчиняется уравнению

$$\frac{\partial}{\partial s} M(z, s) + [\gamma + \kappa(1 - z)] M(z, s) = M(z + \beta, s)(R(z) - \mu),$$

$$R(z) = \int_1^\infty K(y^{-1}) y^{-(z+1)} dy$$

исследуются неподвижные точки уравнения (1), когда имеет место

$$[\gamma + \kappa(1 - z)] M(z) = M(z + \beta)(R(z) - \mu), \quad M(0) = 1.$$

Они определяют предельные плотности распределения $h(x)$. Необходимым условием существования решений является равенство $\gamma = 3\kappa$. В случае степенного закона дробления $K(x) = Kx^\sigma$, $K, \sigma > 0$, определены все решения этого уравнения

$$M(z) = \nu^{z-1} \frac{\Gamma((z + \sigma)/\beta)}{\Gamma((1 + \sigma)/\beta)}, \quad \nu = \left[\frac{\kappa \beta (4 + \sigma)}{K} \right]^{1/\beta},$$

$$h(x) = \beta [\nu \Gamma((1 + \sigma)/\beta)]^{-1} (x/\nu)^\sigma \exp \left(-(x/\nu)^\beta \right),$$

представляющие неколмогоровские финальные законы распределения.
