

Н.М. Василенко, М.В. Працьовитий

(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Лінійний простір послідовностей Фібоначчі, його підпростори та структури в ньому

Послідовність дійсних чисел (c_n) , яка володіє властивістю

$$c_1, c_2 \in R, \quad c_n = c_{n-1} + c_{n-2}, \quad n \geq 3, \quad (1)$$

називатимемо *послідовністю Фібоначчі*.

Найбільш відомою, достатньо вивченою та широко вживаною послідовністю Фібоначчі є послідовність

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Її називатимемо *класичною послідовністю Фібоначчі*.

Теорема. Для загального члена числової послідовності (1) має місце рівність

$$c_n = (2c_1 - c_2) \frac{\varphi^n - \hat{\varphi}^n}{\sqrt{5}} + (c_2 - c_1) \frac{\varphi^{n+1} - \hat{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}}, \quad n \in N,$$

де $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\hat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Наслідок 1. Якщо (c_n) — послідовність Фібоначчі, то має місце рівність

$$c_n = c_1 u_{n-3} + c_2 u_{n-2}, \quad n \in N, \quad (2)$$

де $u_0 = u_1 = 1$, $u_{-1} = 0$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $u_{-n} = (-1)^n u_{n-2}$, — розширена класична послідовність Фібоначчі.

Наслідок 2. Якщо (c_n) — послідовність Фібоначчі, то для $n \geq 3$ мають місце нерівності

$$\frac{\varphi^{n-3}(c_1 + c_2\varphi)}{\sqrt{5}} < c_n < \frac{\varphi^{n-1}(c_1 + c_2\varphi)}{\sqrt{5}}.$$

Рівність (2) встановлює взаємозв'язок між числовою послідовністю типу Фібоначчі та класичною послідовністю Фібоначчі.

Розглядаються два двовимірні лінійні простори: F — дійснозначних послідовностей Фібоначчі над полем дійсних чисел і F_0 — цілозначних послідовностей Фібоначчі над кільцем цілих чисел.

У просторі F виділяється одновимірний підпростір послідовностей (a_n) таких, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Розглядається циліндричне зображення дійсних чисел за допомогою ненульового елемента цього підпростору. Вивчається геометрія такого зображення (властивості циліндричних множин, основне метричне відношення тощо) та властивості деяких фрактальних об'єктів, з ним пов'язаних.

У просторі F_0 виділяється підгрупа елементів (b_n) , для яких ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ збігається. Вивчаються властивості зображень дійсних чисел за допомогою рядів такого виду.
