С.Б.Вакарчук (Днепропетровский университет экономики и права, Днепропетровск, Украина)

О наилучшем полиномиальном приближении в среднем и поперечниках классов функций

При решении ряда задач конструктивной теории функций вещественного переменного как в периодическом так и в непериодическом случае М.К.Потаповым, В.М.Федоровым, С.З.Рафальсоном и другими использовались различные операторы обобщенного сдвига для определения обобщенных модулей непрерывности различных порядков. С этой же целью Е.С.Белинский, В.М.Кокилашвили, В.А.Абилов, Ф.В.Абилов и другие использовали сглаживающие операторы Стеклова. Рассмотрим один из полученных нами результатов. Пусть $L_2 := L_2([0, 2\pi])$ — пространство измеримых по Лебегу 2π-периодических функций, у которых $\|f\| = \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right\}^{1/2} < \infty$; $S_h(f,x) := \frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)dt,\ h > 0,$ — функция Стеклова элемента $f \in L_2$. При этом $S_{h,i}(f) := S_h(S_{h,i-1}(f)), i \in \mathbb{N},\ \ S_{h,0}(f) \equiv f,\ \ S_{h,1}(f) \equiv S_h(f)$. Определим разности первого и высших порядков: $\widetilde{\Delta}_h^1(f,x) := S_h(f,x) - f(x),\ \ \widetilde{\Delta}_h^k(f,x) := \widetilde{\Delta}_h^1(\widetilde{\Delta}_h^{k-1}(f),x) = \sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}S_{h,i}(f,x), k = 2,3,\ldots$. Величину $\Omega_k(f,t) := \sup\{\|\widetilde{\Delta}_h^k(f,\cdot)\| : 0 < h \le t\}$ называют обобщенным модулем непрерывности k-го порядка функции $f \in L_2$. Пусть $L_2^r, r \in \mathbb{N},$ — множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)} \in L_2$; $\ \Psi(t), t \ge 0,$ — непрерывная возрастающая функция такая, что $\Psi(0) = 0$. Через $W^r(\Omega_k, \Psi), r \in \mathbb{Z}_+$, обозначим класс функций $f \in L_2^r$, для которых $\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_k^{1/k}(f^{(r)},\tau)d\tau \le \Psi^{1/k}(t)\ \forall t \in (0,\infty)$. Полагаем $\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_* := \left\{1 - \frac{\sin t}{t},\ \text{если } 0 < t \le t_*;\ \ 1 - \frac{\sin t_*}{t_*},\ \text{если } t \ge t_*\right\}$, где t_* — наименьший положительный корень уравнения $t = \operatorname{tg} t$.

Теорема. *Пусть для любых $0 < t < \infty$ и $n \in \mathbb{N}$ мажоранта $\Psi(t)$ удовлетворяет ограничению*

$$\left(\frac{\Psi(t)}{\Psi(\pi/n)}\right)^{1/k} \ge \frac{1}{tn(1 - Si(\pi)/\pi)}\int\limits_0^{nt}\left(1 - \frac{\sin\tau}{\tau}\right)_* d\tau, \tag{1}$$

где $Si(t)$ — интегральный синус. Тогда имеют место равенства

$$p_{2n}(W^r(\Omega_k,\Psi); L_2) = p_{2n-1}(W^r(\Omega_k,\Psi); L_2) = (1 - Si(\pi)/\pi)^{-k} n^{-r}\Psi(\pi/n),$$

где p_n — любой из n-поперечников: колмогоровский d_n, линейный δ_n, гельфандовский d^n, бернштейновский b_n, проекционный Π_n. При этом множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (1), не пусто.