Р.Г. Грабовская (Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, Одесса, Украина)
А.А. Тингаев (Одесский институт финансов УГУФМТ, Одесса, Украина)

Продолжение решений сингулярных систем дифференциальных уравнений первого порядка между двумя особыми точками

Изучается вопрос об асимптотическом поведении решений сингулярной системы дифференциальных уравнений первого порядка между двумя особыми точками. Рассматривается следующая система:

$$\begin{cases} g_1(x)g_2(x)y_k' = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}(x, y_1,..., y_n)y_j + f_k(x, y_1,..., y_n) \\ k = \overline{1,n} \end{cases},$$

где

1. $a_{kj}(x, y_1,..., y_n), f_k(x, y_1,..., y_n) \in C^{0,1,\dots,1}_{x,y_1,\dots,y_n}(D)$, $k, j = \overline{1,n}$, $D = \begin{bmatrix} x \in (0,l) \\ y_k \in (-\infty;+\infty), k = \overline{1,n} \end{bmatrix}$;
2. функции f_k удовлетворяют условию: $\sum\limits_{k=1}^{n} \left| f_k(x,0,...,0) \right| > 0$;
3. $g_{1,2}(x) \in C^1(0,l)$, причем $g_1(+0) = g_2(l-0) = 0$ и функция $g_1'(x) > 0$ на $(0,l)$ и $g_1'(+0) = 0$, а функция $g_2'(x) < 0$ на $(0,l)$ и $g_2'(l-0) = 0$;
4. $\forall\, k \neq j : a_{kj} = -a_{jk}$;
5. либо $a_{kk} \geq \alpha > 0$ для любого $k = \overline{l,n}$; либо $a_{kk} \leq -\alpha < 0$ для любого $k = \overline{1,n}$, $0 < \alpha < 1$.

Получены достаточные условия существования решения исходной системы, продолжаемого на $(0,l)$, и такого, что $y_k(+0) = y_k(l-0) = 0$. Исследование основано на применении качественного метода кривых и поверхностей без контакта.

Очевидно, что данная задача является сингулярной краевой задачей. Для таких систем подобная задача поставлена впервые. Заметим, что особенности системы уравнений на разных концах промежутка, вообще говоря, могут быть разными. Этот факт существенно расширяет класс изучаемых сингулярных уравнений и систем, что, в свою очередь, приводит к более широким практическим приложениям. Важно отметить, что полученные оценки решений системы выбираются в зависимости от вида особенности на соответствующем конце промежутка.

Отметим также, если исходная система уравнений является l-периодической по переменной x, то получаем достаточные условия существования l-периодического решения.

В качестве иллюстрации результата, рассматривается пример:

$$\sin^2 x \cdot y' = ay + b\sin x + \operatorname{arctg}(y) \cdot \sin^4 x,$$

период $T = \pi$, $x \in (0,\pi)$.

Доказано, что данное уравнение имеет по крайней мере одно решение $y_0(x) = (y_{k_0}(x))_{k=1}^{n}$, продолжаемое на $(0,\pi)$, и лежащее внутри области $D = G_1 \cup G_2 \cup G_3$, где

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 < x \leq \Delta_1 \\ y^2 \leq \delta_1^2 \sin^2 x \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} \pi - \Delta_2 \leq x < \pi \\ y^2 \leq \delta_2^2 \sin^2(\pi - x) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad G_3 = \begin{bmatrix} 0 < x < \pi \\ y^2 \leq c^2 \end{bmatrix}.$$