Ж.Н. Тасмамбетов (Актюбинский Государственный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан),
А.Ж. Тасмамбетова (НПФ "НефтеГаз-Дем", Актобе, Казахстан)

О решении систем, родственных с вырожденными гипергеометрическими системами Горна

Пусть задана система двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{gathered} x^2 \cdot U_{xx} + x[(2\mu+\gamma) - x] \cdot U_x - xy \cdot U_y + [\mu(\mu-1+\gamma) - (\mu+\nu+\alpha)\cdot x] \cdot U = 0, \\ y^2 \cdot U_{yy} + y[(2\nu+\gamma') - y] \cdot U_x - xy \cdot U_x + [\nu(\nu-1+\gamma') - (\nu+\mu+\alpha)\cdot y] \cdot U = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\mu, \nu, \gamma, \gamma'$ и α – некоторые постоянные.

Допустим, что система совместная. Особенности системы $(0,0)$ и (∞,∞).

Требуется установить связь заданной системы с известными вырожденными гипергеометрическими системами Горна и системой Уиттекера.

Действительно, отыскивая решение системы (1) в виде обобщенного степенного ряда двух переменных по возрастающим степеням, можно легко убедиться, что первое частное решение этой системы выражается через функцию Грина двух переменных Ψ_2 :

$$U_1(x,y) = x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \cdot \Psi_2(\alpha, \gamma, \gamma'; x, y),$$

то есть изучаемая система связана с системой Горна (Ψ_2) [1].

Преобразование

$$U(x,y) = \exp\left(\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot y\right) \cdot W(x,y) \tag{2}$$

приводит систему (1) к виду

$$\begin{gathered} x^2 \cdot W_{xx} + (2\mu+\gamma)x \cdot W_x - xy \cdot W_y + \left\{-\frac{x^2}{4} - \frac{xy}{2} + \frac{x}{2}(2\mu+\gamma) + \right. \\ \left. +\mu(\mu-1+\gamma) - (\mu+\nu+\alpha)x\right\} \cdot W = 0, \\ y^2 \cdot W_{yy} + y(2\nu+\gamma')y \cdot W_y - xy \cdot W_x + \left\{-\frac{y^2}{4} - \frac{xy}{2} + \frac{y}{2}(2\nu+\gamma') + \right. \\ \left. +\nu(\nu-1+\gamma') - (\mu+\nu+\alpha)y\right\} \cdot W = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Далее, изучен ряд частных случаев системы (3). Именно:

1. при $2\mu+\gamma = 0$ и $2\nu+\gamma' = 0$ получаем систему вида Уиттекера. Решения этой системы также выражаются через функцию Горна $\Psi_2(\alpha, \gamma, \gamma'; x, y)$.

2. при $2\mu+\gamma = 0$ и $2\nu+\gamma' = 0$ получается система Вильчинского.

3. при $\mu - 0, \nu = 0$ получаем систему, родственную с системой Уиттекера. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений уравнения, родственные с вырожденным гипергеометрическим уравнением достаточно изучены, однако в теории частных производных такие исследования отсутствуют.

[1] Appell P. and Kampe de Feriet M.J. Fonctions hypergeometriques et hyper, spheriques. Polynomes d'Hermite. - Paris: Gauthier - Villars, 1926. -434 s.