

Б.Й. Пташник, М.М. Симолюк (Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна)

Застосування метричної теорії чисел для розв'язання проблеми малих знаменників у задачах математичної фізики

При застосуванні методу розділення змінних для дослідження багатоточкових задач із кратними вузлами в області $\{(t, x) : t \in (0, T), x \in \Omega_p\}$, Ω_p – p -вимірний тор $(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^p$, для рівняння з частинними похідними $L(\partial/\partial t, D_x)u(t, x) = 0$, де $D_x = (-i\partial/\partial x_1, \dots, -i\partial/\partial x_p)$, $L(\lambda, k) = \lambda^n + A_1(k)\lambda^{n-1} + \dots + A_{n-1}(k)\lambda + A_n(k)$,

$$A_j(k) = \sum_{|s| \leq N_j} A_j^s k_1^{s_1} \dots k_p^{s_p}, \quad A_j^s \in \mathbf{C}, \quad N_j \in \mathbf{N}, \quad j = 1, \dots, n, \quad s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbf{Z}_+^p,$$

$k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbf{Z}^p$, виникають визначники

$$\Delta(k) = \det \|\lambda_q^{s_j-1}(k) \exp(\lambda_q(k)t_j)\|_{q=1, \dots, n}^{j=1, \dots, m; s_j=1, \dots, r_j}, \quad k \in \mathbf{Z}^p, \quad (1)$$

в яких $\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k)$ – корені многочлена $L(\lambda, k)$, r_1, \dots, r_m – кратності вузлів $t_1, \dots, t_m \in [0, T]$ відповідно, $r_1 + \dots + r_m = n$, $m \leq n$.

Визначники (1) входять знаменниками у формули для коефіцієнтів ряду Фур'є, яким зображується розв'язок $u(t, x)$ розглядуваної задачі. Вони, будучи відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими за модулем для нескінченної кількості цілочислових векторів k , що зумовлює розбіжність згаданого ряду (див. приклади в [1]). Тому важливим є питання про оцінки знизу для визначників (1), зокрема, про можливість виконання таких оцінок:

$$|\Delta(k)| \geq C(1 + |k|)^\alpha \exp(\beta|k|^\gamma), \quad C > 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}, \quad k \in \mathbf{Z}^p, \quad (2)$$

де сталі C, α, β, γ не залежать від k , $|k| = |k_1| + \dots + |k_p|$.

На основі сучасних результатів і методів метричної теорії чисел доведено, що оцінки (2) виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега в \mathbf{R}^m) векторів $(t_1, \dots, t_m) \in [0, T]^m$ при певних значеннях сталих C, α, β, γ , якщо деякий симетричний многочлен від коренів $\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k)$ допускає степеневу оцінку знизу стосовно $|k|$. Показано, що така оцінка справджується для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів A_j^s многочлена $L(\lambda, k)$. Отримані результати узагальнено на випадок визначників, які виникають у багатоточкових задачах для систем рівнянь із частинними похідними.

Зауважимо, що визначники вигляду (1) виникають також при дослідженні задачі Діріхле для рівнянь із частинними похідними в обмежених областях.

Дослідження підтримані ДФФД України (проект № Ф 29.1/005).

- [1] Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — К.: Наук. думка, 1984. — 264 с.