

Ю.М.Сибіль (Львівський національний університет ім.Ів.Франка, Львів, Україна)

Варіаційний підхід до розв’язування граничних задач для еліптичного рівняння другого порядку в тілі з тонким включенням

Досить часто тонке включення в тривимірному тілі зручно розглядати як розімкнуту поверхню. В цьому випадку в процесі побудови чисельних схем наближеного розв’язування диференціальної задачі можна враховувати аналітичну поведінку як самого розв’язку, так і його похідних в околі точок нерегулярності.

Нехай $\Omega_+ \subset R^3$ - деяка обмежена область з гладкою границею Σ , а $S \subset \Omega_+$ двостороння гладка розімкнута поверхня, з допомогою якої ми моделюємо тонке включення. Позначимо $\Omega = R^3 \setminus \bar{S}$, де $\bar{S} = S \cup \Gamma$, Γ - край поверхні S . В області Ω визначимо гільбертові простори $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^1(\Omega, L)$ та відповідні оператори слідів $\gamma_{0,S}^\pm$, $\gamma_{1,S}^\pm$ [1], де L - еліптичний оператор другого порядку.

Розглянемо наступні задачі. Задача Діріхле: знайти функцію $u \in H^1(\Omega)$, яка задовільняє

$$Lu(x) = f(x), \quad f \in H^{-1}(\Omega), \quad x \in \Omega,$$

$$\gamma_{0,S}^\pm u(x) = 0, \quad \gamma_{1,\Sigma}^\pm u(x) = 0,$$

та задача Неймана: знайти функцію $u \in H^1(\Omega, L)$, яка задовільняє

$$Lu(x) = g(x), \quad g \in L_2(\Omega), \quad x \in \Omega,$$

$$\gamma_{1,S}^\pm u(x) = 0, \quad \gamma_{1,\Sigma}^\pm u(x) = 0.$$

Показано, що задача Діріхле еквівалентна наступній варіаційній задачі (задача D) :

знайти функцію $u \in H_0^1(\Omega)$ таку, що для заданої $f \in H^{-1}(\Omega)$ та для довільної $v \in H_0^1(\Omega)$, маємо $a(u, v) = l(v)$.

Тут $a(u, v)$ - неперервна в $H^1(\Omega)$ білінійна форма, пов’язана з оператором L , а лінійний функціонал $l(v) = \langle f, v \rangle$, де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - відношення двоїстості між $H_0^1(\Omega)$ та $H^{-1}(\Omega)$.

Аналогічно задача Неймана еквівалентна варіаційній задачі (задача N) :

знайти функцію $u \in H^1(\Omega, L)$ таку, що для заданої $g \in L_2(\Omega)$ та для довільної $v \in H^1(\Omega)$ маємо $a(u, v) = l(v)$.

Лінійний функціонал $l(v)$ в цьому випадку задано наступним чином: $l(v) = (g, v)_{L_2(\Omega)}$.

Для задачі D та задачі N відповідно доведено існування та єдиність розв’язків.

[1] Sybil Yu. Three-dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface. // Математичні Студії. – 1997. - Т.8, № 1. С. 79-96.
