

В.Ю. Слюсарчук (Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна)

Метод локальної лінійної апроксимації в теорії нелінійних операторів

Нехай E – скінченновимірний банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$, G – зліченна адитивна група, C^0 – банаховий простір обмежених і неперервних на R функцій $x = x(t)$ зі значеннями в E з нормою $\|x\|_{C^0} = \sup_{t \in R} \|x(t)\|_E$, C^1 – банаховий простір

функцій $x \in C^0$, для кожної з яких $\frac{dx}{dt} \in C^0$, з нормою $\|x\|_{C^1} = \left\{ \|x\|_{C^0}, \left\| \frac{dx}{dt} \right\|_{C^0} \right\}$ і $l_\infty(G, E)$ – банаховий простір відображень $y : G \rightarrow E$, для кожного з яких $\sup_{g \in G} \|y(g)\|_E < +\infty$ з нормою $\|y\|_{l_\infty(G, E)} = \sup_{g \in G} \|y(g)\|_E$.

Розглянемо s -неперервні оператори $L_F : C^1 \rightarrow C^0$ і $D_H : l_\infty(G, E) \rightarrow l_\infty(G, E)$, що визначаються рівностями

$$(L_F x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + (Fx)(t), \quad (D_H y)(g) = y(g) + (Hy)(g),$$

де $F : C^1 \rightarrow C^0$ – обмежений s -цілком неперервний і $H : l_\infty(G, E) \rightarrow l_\infty(G, E)$ – s -неперервний нелінійні оператори.

Наведемо умови, коли множини значень $R(L_F)$ і $R(D_H)$ операторів L_F і D_H збігаються відповідно з C^0 і $l_\infty(G, E)$.

Позначимо через Ω_1 і Ω_2 множини s -цілком неперервних елементів A простору $L(C^1, C^0)$ і s -неперервних елементів B простору $L(l_\infty(G, E), l_\infty(G, E))$, для яких оператори

$$(L_A x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + (Ax)(t), \quad (D_B y)(g) = y(g) + (By)(g)$$

мають обернені неперервні оператори.

Теорема 1. *Нехай для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ й оператор $A \in \Omega_1$, що*

$$\sup_{\|x\|_{C^1} \leq r} \|Fx - Ax\|_{C^0} \leq \frac{r}{\|L_A^{-1}\|_{L(C^0, C^1)}} - H.$$

Тоді $R(L_F) = C^0$.

Теорема 2. *Нехай для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ й оператор $B \in \Omega_2$, що*

$$\sup_{\|y\|_{l_\infty(G, E)} \leq r} \|Hy - By\|_{l_\infty(G, E)} \leq \frac{r}{\|D_B^{-1}\|_{L(l_\infty(G, E), l_\infty(G, E))}} - H.$$

Тоді $R(D_H) = l_\infty(G, E)$.

Правильними є аналогічні твердження для диференціальних і різницьових операторів.
