Д.С. Скороходов (Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара)

О задаче Ландау-Колмогорова для классов абсолютно-монотонных на отрезке функций

Пусть $[a,b]$ – конечный отрезок числовой прямой $\mathbf{R}$. Через $L_p[a,b]$, $1 \le p \le \infty$, обозначим пространство функций f с обычной нормой $\|f\|_p$. Пусть также $L_p^r[a,b]$, $r \in \mathbf{N}$, – пространство функций f, для которых существует и абсолютно непрерывна на $[a,b]$ производная $f^{(r-1)}$, и $f^{(r)} \in L_p[a,b]$.

Пусть $1 \le p,q,s \le \infty$ и $k,r \in \mathbf{N}$, $k < r$, а $X \subset L_s^r[a,b]$ – некоторый класс функций. Задача Ландау-Колмогорова на отрезке $[a,b]$ для класса X может быть сформулирована в следующей постановке.

Задача 1. *Для любого $\delta > 0$ найти величину*

$$\omega_{p,q,s}^{k,r}(\delta; X) := \sup\left\{\left\|f^{(k)}\right\|_q \ : \ f \in X,\ \|f\|_p \le \delta,\ \left\|f^{(r)}\right\|_s \le 1\right\}.$$

Решение данной задачи тесно связано с точными аддитивными неравенствами типа Колмогорова на отрезке для класса функций X (см. [1, §1.7]). Отметим, что на данный момент не известно полного (в смысле произвольных порядков k,r производных) решения задачи 1 для классов $X = L_s^r[a,b]$. Поэтому представляет интерес рассмотрение задач такого типа для более узких классов функций. Так, мы рассмотрели класс $AM[a,b]$ абсолютно монотонных на отрезке $[a,b]$ функций.

Определение 1. *Функция f называется абсолютно монотонной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна на нем и на интервале (a,b) существуют и неотрицательны производные всех порядков, т. е. $f^{(k)}(x) \ge 0$ для всех $x \in (a,b)$ и $k \in \mathbf{Z}_+$.*

Для $n \in \mathbf{N}$, $n \ge r$, положим

$$\tau_{p,s}^r(n) := \frac{(n-r+1/s)!}{(n+1/p)!} \cdot (b-a)^{r+1/p-1/s}, \quad \Delta_{p,s}^r(n) := [\tau_{p,s}^r(n+1), \tau_{p,s}^r(n)],$$

и $\Delta_{p,s}^r(r-1) := [\tau_{p,s}^r(r), \infty)$. Решение задачи 1 для $p,q,s \in \{1,\infty\}$ дается следующей

Теорема 1. *Пусть $p,q,s \in \{1,\infty\}$ и $k,r \in \mathbf{N}$, $1+1/q-1/p \le k \le r-1+1/q-1/s$. Тогда, для $n \ge r-1$ и $\delta \in \Delta_{p,s}^r(n)$ верно соотношение*

$$\omega_{p,q,s}^{k,r}(\delta; AM[a,b]) = \frac{(n-r+1+1/s)!}{(n+1-k+1/q)!} \cdot (b-a)^{r-k+1/q-1/s}$$
$$+ \left(\delta - \tau_{p,s}^r(n+1)\right) \cdot \frac{(m+1+1/p)!(r-k+1/q-1/s)}{(m+1-k+1/q)!(r+1/p-1/s)} \cdot (b-a)^{-k+1/q-1/p}.$$

[1] В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов, С.А. Пичугов, Неравенства для производных и их приложения, Наукова думка, Киев, 2003.