

А.Л. Шидліч (Інститут математики НАН України, Київ, Україна)

Порядкові оцінки найкращих n -членних наближень класів функцій багатьох змінних в просторах S^p

Нехай R^d , $d \geq 1$, — d -вимірний простір з елементами $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$, і $L_p = L_p(T^d)$, $1 \leq p < \infty$, $T^d = \prod_{j=1}^d [-\pi, \pi]$, — простір 2π -періодичних за кожною змінною функцій $f(\mathbf{x})$ зі стандартною нормою $\|f\|_{L_p}$.

Нехай, далі, S^p , $0 < p < \infty$, [1] (Гл. XI) — простір всіх функцій $f \in L_1$, для яких

$$\|f\|_{S^p} = \left(\sum_{\mathbf{k} \in Z^d} |\hat{f}(\mathbf{k})|^p \right)^{1/p} < \infty, \quad \text{де} \quad \hat{f}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{T^d} f(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} d\mathbf{x}.$$

Функції $f \in L_1$ та $g \in L_1$ вважають тотожними в просторі S^p , якщо $\|f - g\|_{S^p} = 0$.

Для кожної додатної опуклої вниз функції $\psi = \psi(t)$, $t \geq 1$, такої, що $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$ ($\psi \in M$), покладемо

$$\mathcal{F}_q^\psi = \left\{ f \in L_1 : \left| \frac{\hat{f}(\mathbf{0})}{\psi(1)} \right|^q + \sum_{\mathbf{k} \in Z^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \left| \frac{\hat{f}(\mathbf{k})}{\psi(\|\mathbf{k}\|_0)} \right|^q \leq 1 \right\}, \quad \|\mathbf{k}\|_0 := \max\{|k_1|, \dots, |k_d|\}.$$

Величину

$$e_n(\mathcal{F}_q^\psi)_p = \sup_{f \in \mathcal{F}_q^\psi} \inf_{a_{\mathbf{k}}, \gamma_n} \left\| f(\mathbf{x}) - (2\pi)^{-d/2} \sum_{\mathbf{k} \in \gamma_n} a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\|_{S^p},$$

де γ_n — довільний набір із n векторів $\mathbf{k} \in Z^d$, називають величиною найкращого n -членного наближення класу $\mathcal{F}_q^\psi$ в просторі S^p .

Теорема. Нехай $0 < q \leq p < \infty$ і функція $\psi^p(\cdot)$ належить до однієї з множин $M'_\infty = \{\psi \in M : \alpha(\psi; t) := \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \downarrow 0, \frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \uparrow \infty\}$, $M_C = \{\psi \in M : 0 < K_1 \leq \alpha(\psi; t) \leq K_2 < \infty\}$, або ж $M_\infty^c := \{\psi \in M : \alpha(\psi; t) \downarrow 0, 0 < K_1 < \psi(t)/|\psi'(t)| < K_2 < \infty\}$. Тоді має місце порядкова при $n \rightarrow \infty$ рівність

$$e_n(\mathcal{F}_q^\psi)_p \asymp \psi(n^{1/d}/2) (n\alpha(\psi; n^{1/d}/2))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Зазначимо, що природними представниками множин M'_∞ та M_∞^c є функції $\exp(-\alpha t^r)$, $\alpha > 0$, у випадках, коли $r \in (0, 1)$ та $r = 1$ відповідно, а множини M_C — функції $t^{-\beta}$ і $t^{-\beta} \ln^\varepsilon(t + e)$ при $\beta > 0$ і $\varepsilon \in R$.

Зазначимо також, що у випадку, коли $p = 2$, а функція $\psi(t) = t^{-\beta}$, $\beta > 0$, аналогічні порядкові рівності для величин $e_n(\mathcal{F}_q^\psi)_2$ випливають з теореми 6.1 роботи [2].

- [1] Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2-х ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. II. — 467 с.
- [2] R.A. DeVore, V.N. Temlyakov, Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Anal. Appl. — 1995. — V.2, №1. — 29-48.