

А.А.Владимиров, И.А.Шейпак (МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия)

О колебаниях самоподобной сингулярной струны.

Уравнение малых колебаний струны описывается спектральной задачей

$$-y'' - \lambda \rho y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (1)$$

где весовая функция ρ отвечает распределению масс. Вопрос об асимптотическом поведении собственных значений этой задачи восходит к работам М.Г. Крейна (см., например, [1]). Мы рассматриваем в качестве веса ρ элемент пространства $\overset{\circ}{W}_{-2}^{-1}[0, 1]$, т.е. обобщённую функцию. В этом классе весов описать асимптотическое поведение собственных значений не представляется возможным. Анализ поведения собственных значений удобнее вести в терминах функции $P \in L_2[0, 1]$, такой, что $\rho = P'$ (в обобщённом смысле). М.Г. Крейном показано, что если функция P имеет абсолютно непрерывную компоненту, то собственные значения задачи (1) ведут себя следующим образом

$$\lambda_n \sim c^{-2}n^2,$$

где $c = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{P'_{ac}} dx$. В связи с этим возникает вопрос о поведении собственных значений задачи (1) если абсолютно непрерывная компонента функции P равна нулю. С точки зрения получения асимптотических формул хорошим классом функций оказались самоподобные функции (см., например, [2]).

В настоящей работе проведена классификация самоподобных квадратично суммируемых сингулярных функций и получены результаты о влиянии на асимптотику собственных значений задачи (1) непрерывной сингулярной компоненты функции P и дискретной компоненты соответственно.

В частности, если P является непрерывной сингулярной самоподобной функцией, то поведение собственных значений подчиняется степенному закону, если же P является самоподобной функцией скачков, то собственные значения растут экспоненциальным образом.

[1] Крейн М.Г. Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру. — ДАН СССР, **76**, №3, 1951, 345–348.

[2] Шейпак И.А. Конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах $L_p[0, 1]$, Матем. заметки, **81**, №6, 2007, 924–938.