Р.Б. Сеилханова (Зап.-Каз. аграрно-технический университет имени Жангир хана, Уральск, Казахстан)

Первая задача Дарбу с отходом от характеристики и сопряженная ей задача для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина

В [1], для уравнения колебания струны изучалась задача Дарбу с отходом от характеристики, где обращено внимание на изучение таких задач для гиперболических уравнений. Многомерный аналог этой задачи для волнового уравнения предложен в [2].

Пусть D_β – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная коноидами $\beta|x| = \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi$, $|x| = 1 - \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi$ и плоскостью $t = 0$, $0 \le t \le t_0$, $t_0 : \dfrac{\beta}{1+\beta} = \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1,...,x_m)$, а $0 < \beta = const < 1$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через S_β, S^1 и S соответственно.

В области D_β рассмотрим взаимно-сопряженные вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения с оператором Чаплыгина

$$Lu \equiv g(t)\Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0, \tag{1}$$

$$L^*\upsilon \equiv g(t)\Delta_x \upsilon - \upsilon_{tt} - \sum_{i=1}^m a_i \upsilon_{x_i} - b\upsilon_t + d\upsilon = 0, \tag{1*}$$

где Δ_x - оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m$, $m \ge 2$, $g(t) > 0$ при $t > 0$, $g(0) = 0$, $g(t) \in C^2((0,t_0)) \cap C([0,t_0])$, $d(x,t) = c - \sum\limits_{i=1}^m a_{ix_i} - b_t$.

В качестве многомерного аналога задачи Дарбу с отходом от характеристики рассмотрим следующую

Задача 1. Найти в области D_β решение уравнения (1) из класса $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = \tau(x), \quad u|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x),$$

а также рассмотрим сопряженную ей задачу Дирихле

Задача 2. Найти в области D_β решение уравнения (1^*) из класса $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\upsilon|_S = \tau(x), \quad \upsilon|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x), \quad \upsilon|_{S^1} = \varphi(x).$$

Для гладких коэффициентов уравнения (1) и при определенных условиях на граничные данные показано, что задачи 1 и 2 имеют единственные решения.

[1] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981.
[2] Protter M. H. // J. Rational Mech. and Analysis. — 1954. — V.3, №4.