

А.И.Щерба (Черкасский государственный технологический университет, Черкассы, Украина).

Об устойчивости единичного круга наименьшего собственного периметра на плоскости Минковского

Пусть B – собственная выпуклая компактная фигура на аффинной плоскости A^2 , центрально симметричная относительно начала $\bar{0}$. Хорошо известно [1;2], что дистанционная функция Минковского фигуры B :

$$g_B(\bar{x}) = \inf\{t : t > 0, \bar{x} \in t \cdot B\}, \quad \bar{x} \in A^2,$$

является нормой на A^2 . Следуя Минковскому (см. [3;4]), с помощью функции $g_B(\bar{x})$ вводят расстояние между точками $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из A^2 : $\rho_B(\bar{x}; \bar{y}) = g_B(\bar{x} - \bar{y})$. Аффинную плоскость A^2 , с введенной метрикой ρ_B , называют плоскостью Минковского M^2 , а фигуру B – нормирующей или единичным кругом. Через $L(B)$ обозначим длину единичной окружности B в метрике ρ_B .

В 1932 г. С.Голаб [5] установил, что для собственного периметра $L(B)$ единичного круга справедливы оценки: $6 \leq L(B) \leq 8$, причем равенство $L(B)=6$ достигается, когда B – аффинно правильный шестиугольник, а равенство $L(B)=8$ достигается, когда B – параллелограмм.

В 1953г. Ю.Г.Решетняк [6], а несколько позднее Д.Лаугвиц, переоткрыли результат Голаба.

В 1967г. Дж. Шеффер [7] доказал, что значение 6 собственного периметра $L(B)$ достигается только для аффинно правильного шестиугольника, а возможное наибольшее значение $L(B)=8$ – только для параллелограмма.

Основной результат посвящен вопросу устойчивости единичного круга в случае близости его собственного периметра $L(B)$ к наименьшему возможному значению 6.

Теорема. Пусть собственный периметр единичного круга B плоскости Минковского M^2 равен $L(B) = 6 + \varepsilon$, где $0 \leq \varepsilon \leq 10^{-10}$. Тогда существует аффинно правильный шестиугольник S с центром в начале $\bar{0}$, для которого выполняются включения:

$$S \subset B \subset (1 + \sqrt[4]{\varepsilon}) \cdot S.$$

- [1] Minkowski H., *Geometrie der Zahlen*, Leipzig-Berlin, 1910.
- [2] Боннезен Т., Фенхель В., *Теория выпуклых тел*, Фазис, М., 2002.
- [3] Лейхтвейс К., *Выпуклые множества*, Наука, М., 1985.
- [4] Thompson A.C., *Minkowski Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [5] Golab S., *Quelques problemes metriques de la geometrie de Minkowski* // Trav. l'Acad. Mines Cracovie, 6(1932), 1-79.
- [6] Решетняк Ю.Г., *Одна экстремальная задача из теории выпуклых кривых*, УМН, 8:6(1953), 125-126.
- [7] Schaffer J.J., *Inner diameter, perimeter and girth of spheres* // Math. Ann., 173(1967), 59-79.