

О.В.Іванов, І.М.Савич (Національний технічний університет України "КПІ", Київ, Україна)

Про асимптотичний розподіл оцінки Коенкера-Бассета параметра регресії з сильно залежним шумом

Розглянемо модель регресії $X(t) = g(t, \theta) + \varepsilon(t)$, $t \geq 0$, де $g(t, \tau) \in C([0, +\infty] \times \Theta^c)$ — функція, $\Theta \subset R^q$ — відкрита обмежена множина. Припустимо, що $\varepsilon(t) = G(\xi(t))$, $t \in R^1$, де $G(x)$, $x \in R^1$ — борелівська функція така, що $E\varepsilon(0) = 0$, $E\varepsilon^2(0) < \infty$. Випадковий процес $\xi(t)$, $t \in R^1$ є неперервним в середньому квадратичному вимірним стаціонарним гауссівським процесом, $E\xi(0) = 0$, $B(t) = E\xi(t)\xi(0) = L(|t|)|t|^{-\alpha}$, $\alpha \in (1/2, 1)$, де $L(t)$ — повільно змінна на нескінченності функція, $B(0) = 1$. Нехай $F(x)$ — функція розподілу $\varepsilon(0)$, причому $F(0) = \beta$, $\beta \in (0, 1)$, і $p(x) = F'(x)$ — обмежена щільність, така що $|p(x) - p(0)| \leq H|x|$, $p(0) > 0$, $H < \infty$ — деяка константа.

Введемо функцію $\rho_\beta(x) = \beta x \chi_{[0, \infty)}(x) + (\beta - 1)x \chi_{(-\infty, 0)}(x)$.

Означення. Оцінкою Коенкера-Бассета параметра $\theta \in \Theta$ називається випадковий вектор $\hat{\theta}_T = \hat{\theta}_T(X(t), t \in [0, T]) \in \Theta^c$, для якого

$$Q_T(\hat{\theta}_T) = \min_{\tau \in \Theta^c} Q_T(\tau), \quad Q_T(\tau) = \int_0^T \rho_\beta(X(t) - g(t, \tau)) dt.$$

Припускаючи, що $g(t, \tau)$ — неперервно диференційовна по $\tau \in \Theta^c$, позначимо

$$d_{iT}^2(\theta) = \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} g(t, \theta) \right)^2 dt, \quad d_T^2(\theta) = \text{diag}(d_{iT}^2(\theta))_{i=1}^q.$$

Припустимо, оцінка $\hat{\theta}_T$ конзистентна, тобто для будь-якого $r > 0$

$$P(\|T^{-1/2} d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)\| \geq r) \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow \infty.$$

Нехай також існує спектральна міра μ функції регресії $g(t, \theta)$, причому спектральна щільність $f(\lambda)$, $\lambda \in R^1$ випадкового процесу $\xi(t) \in \mu$ — припустимою (у сенсі [1]).

Позначимо $I_T(\theta) = \left(d_{iT}^{-1}(\theta) d_{iT}^{-1}(\theta) \int_0^T (\partial/\partial \tau_i) g(t, \theta) (\partial/\partial \tau_l) g(t, \theta) dt \right)_{i,l=1}^q$, $\theta \in \Theta$. Нехай $\lambda_{\min}(I_T(\theta))$ —

найменше власне число $I_T(\theta)$, причому $\lambda_{\min}(I_T(\theta)) \geq \lambda_0 > 0$ для $T > T_0$.

Якщо виконуються деякі припущення щодо зростання перших та других похідних за τ функції $g(t, \theta)$, то асимптотичний при $T \rightarrow \infty$ розподіл вектора $d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)$ збігається з асимптотичним розподілом, якщо він існує, вектора

$$-p^{-1}(0)I_T^{-1}(\theta)d_T^{-1}(\theta) \int_0^T \nabla g(t, \theta) (\chi\{\varepsilon(t) < 0\} - \beta) dt.$$

Цей результат переносить результат книги [2] для оцінок найменших модулів у моделях зі слабкою залежністю на оцінки Коенкера-Бассета у моделях з сильною залежністю.

- [1] Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А. Гауссовские случайные процессы. - М.: Наука, 1970. - 383 с.
[2] Ivanov A.V., Leonenko N.N. Statistical Analysis of Random Fields. - Dordrecht-Boston-London: Kluwer Acad.Publ., 1989. - P.244.