В.М. Савельев (Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко, Луганск, Украина)

Поверхности $F^2 \subset E^4$ с окружностью в качестве эллипса нормальной кривизны

Если гауссова кривизна поверхности $K < 0$, то обязательно существует точка, в которой эллипс нормальной кривизны — окружность ненулевого радиуса. К классу поверхностей с окружностью в качестве эллипса нормальной кривизны относятся повехности $F^2 \subset E^4$ локально представимые в виде $\{x, y, u(x, y), v(x, y)\}$, где $u + iv$ — аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$. Такие поверхности называются R-поверхностями. Для R-поверхностей известно, что секционная кривизна $\overline{K}$ вдоль грассманова образа $\Gamma^2 \subset G_{2,4}$ равна 2 [1]. Кроме R-поверхностей можно указать и другие поверхности с окружностью в качестве эллипса нормальной кривизны [2]. Например, поверхность F^2 такая, что в каждой точке $x \in F^2 \subset E^4$ окружность нормальной кривизны проходит через x. В работе в терминах грассманова образа дана характеристика этого класса поверхностей.

Пусть $\overline{H}_e$ и $\overline{K}_e = \overline{K} - 1$ — симметрические функции главных нормальных кривизн грассманова образа Γ^2 по отношению к нормали гиперповерхности $G_{2,4} \subset S^5$ [1].

Теорема. *Поверхность $F^2 \subset E^4$ имеет в каждой точке $x \in F^2 \subset E^4$ окружность нормальной кривизны, проходящей через x тогда и только тогда, когда $\overline{H}_e = \frac{2}{5}$, $\overline{K}_e = 0$.*

Примером рассматриваемого класса поверхностей есть вложение листа Мебиуса в E^4

$$\mathbf{r}(u, v) = \left\{ \cos u, \sin u, v \cos \frac{u}{2}, v \sin \frac{u}{2} \right\}.$$

Замечательным фактом для этой поверхности явлется то, что метрика грассманова образа имеет гауссову кривизну $+1$.

[1] Аминов Ю. А. Геометрия подмногообразий. — К.: Наукова думка, 2002.

[2] Аминов Ю. А. Кручение двумерных поверхностей в евклидовых пространствах// Укр. геом. сб. — 1975. — Вип **17.**