

О.А. Марченко, Т.А. Самойленко (Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев)

Исследование нелинейной дифференциальной модели двухфазных сред

Рассматривается начально-краевая задача для нелинейной системы одного параболического уравнения влагопереноса-фильтрации и двух гиперболических уравнений теории упругости следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1(h, u) \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2(h, u) \frac{\partial h}{\partial x_2} \right) = f(x, t), \\ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (Au)(h, u) + \text{grad } h = F(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad \Omega_T = \Omega \times (0, T], \end{cases} \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2)^T, u = (u_1, u_2)^T, k_i(h, u) = a_i(x)K(x, h, u)$, $i = 1, 2$, $\rho = \text{const} \geq 0$, A – оператор теории упругости с коэффициентами $\lambda(h, u) = b_1(x)P\left(x, h, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$, $\mu(h, u) = b_2(x)P\left(x, h, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$; функции $a_i(x)$, $b_i(x)$, $i = 1, 2$; $K(x, h, u)$, $P\left(x, h, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$, $f(x, t)$, $F(x, t) = (F_1(x, t), F_2(x, t))^T$ обладают достаточной гладкостью.

Начально-краевые условия имеют вид:

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = q_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}; \quad (2)$$

$$h(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_1 \times (0, T]; \quad (3)$$

$$k_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} \cos(n, x_1) + k_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} \cos(n, x_2) = 0, \quad (x, t) \in (\Gamma_2 \cup \Gamma_3) \times (0, T]; \quad (4)$$

$$k_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} \cos(n, x_1) + k_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} \cos(n, x_2) = g(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_4 \times (0, T]; \quad (5)$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_2 \times (0, T], \quad u_n = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_3 \times (0, T]; \quad (6)$$

$$\tau_s = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_3 \times (0, T], \quad \sigma_n = S(x, t), \quad \tau_s = T(x, t), \quad (x, t) \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_4) \times (0, T], \quad (7)$$

где $\bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i = \partial\Omega$; h_0, u_0, q_0, g, S, T – заданные функции достаточной гладкости.

Введено Z – множество вектор-функций $w(x, t) = (h(x, t), u(x, t))^T$, удовлетворяющих главным краевым условиям (3), (6), компоненты которых и их производные по времени $\frac{\partial h}{\partial t}(x, t), \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t), \forall t \in (0, T], \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ вместе с $h(x, 0), u(x, 0)$ принадлежат пространству $W_2^1(\Omega)$, соответствующие смешанные производные $\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial t}$ и $\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i}$ равны “почти всюду”, $i = 1, 2$, и принадлежат $L_2(\Omega)$.

Получены оценки погрешности для непрерывного по времени и полностью дискретного приближенного обобщенного решения, построенного по методу конечных элементов.

Теорема 1. Пусть $w \in Z$ – обобщенное решение задачи (1)-(7), а $w^N \in Z^N$ – соответствующее приближенное обобщенное решение. Предположим, что $w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \in L_\infty(0, T; W_2^{k+1}(\Omega))$. Тогда существует константа C такая, что выполняется оценка

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}(w - w^N) \right\|_{L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))} + \|w - w^N\|_{L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))} \leq C \tilde{h}^k,$$

где C зависит от T , норм $\|w\|_{L_2(0, T; W_2^{k+1}(\Omega))}$, $\|w'_t\|_{L_2(0, T; W_2^{k+1}(\Omega))}$, $\|w''_{tt}\|_{L_2(0, T; W_2^{k+1}(\Omega))}$ и начально-краевых функций; $\tilde{h}$ – максимальная длина сторон треугольников, $k=1,2,3$ – степень многочленов метода конечных элементов.

Теорема 2. Пусть $w \in Z$ – обобщенное решение задачи (1)-(7) и $\{W^j(x)\}_{j=0}^J \subset Z_t^N$ – приближенное решение соответствующей задачи Коши при $t = j\tau$, τ – шаг по временной переменной. Предположим, что $w \in W_2^{k+1}(\Omega)$. Тогда существует константа $C = C(T) > 0$, не зависящая от $\tilde{h}, \tau$, такая, что

$$\max_{0 \leq j \leq J} \|W^j - w^j\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C(\tilde{h}^k + \tau^2).$$

- [1] Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. — К.: Наукова думка, 1998. — 614 с.
- [2] Скопецкий В.В., Марченко О.А., Самойленко Т.А. Приближенное решение нелинейной системы уравнений для двухфазных сред // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — №4. — С. 524 - 536.