

У.А. Сафаров (Институт математики и информационных технологий АНРУз,  
Ташкент, Узбекистан)

## Вероятностные инвариантные меры гомеоморфизмов окружности с несколькими изломами

В настоящей работе изучаются гомеоморфизмы окружности  $S^1 = R^1/Z^1 \simeq [0, 1)$  с особенностями типа излома, т. е. отображения гладкие всюду, за исключением нескольких точек, в которых происходит разрыв первой производной.

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм  $f(x)$  единичной окружности:  $f(x) = F(x) \pmod{1}$ ,  $x \in S^1$ , где  $F(x)$ -поднятие, определяющее  $f(x)$ , которое удовлетворяет следующим условиям:

- $a_1)$   $F(x)$ - непрерывная, строго возрастающая на  $R^1$ ;
- $a_2)$   $F(x+1) = F(x) + 1$ , для любого  $x \in R^1$ ;
- $a_3)$  гомеоморфизм  $f$  в точках  $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(k)} \in S^1$  имеет изломы, т. е. существуют конечные односторонние производные  $F'(b^{(i)} \pm 0) > 0$  и

$$\frac{F'(b^{(i)} - 0)}{F'(b^{(i)} + 0)} = \sigma_i \neq 1, \quad i = \overline{1, k};$$

- $a_4)$   $F(x)$ -абсолютная непрерывная функция на каждом связном компоненте множества  $S^1 \setminus \{b^{(i)}, i = \overline{1, k}\}$  и  $F \in L_1(S^1, d\ell)$  ;

$$a_5) \prod_{i=1}^k \sigma_i \neq 1.$$

Важной характеристикой гомеоморфизмов окружности является число вращения  $\rho_f$ :  $\rho_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{(n)}(x)}{n} \pmod{1}$ . Здесь  $F^{(n)}$  обозначает  $n$ -ю итерацию функции.

Смысл условий  $a_3)$  и  $a_4)$  состоит в том, что гомеоморфизм  $f$  является кусочно-гладким отображением имеющим особенности типа излома в точках  $b^{(i)}, i = \overline{1, k}$ . Условие  $a_5)$  означает, что произведение величин изломов в гомеоморфизма  $f$  не тривиально. Хорошо известно, что любой гомеоморфизм  $f$  окружности  $S^1$  с иррациональным числом вращения  $\rho_f$  строго эргодичен, т. е. вероятностная инвариантная относительно  $f$  мера единственна [1]. В работе [2] доказана, что инвариантные меры гомеоморфизмов окружности  $f \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{b\})$ ,  $\varepsilon > 0$  с одной точкой излома  $x = b$  и иррациональным числом вращения  $\rho_f$  являются сингулярными. Инвариантные меры гомеоморфизмов окружности с двумя изломами изучались в работе [3].

Основным результатом нашей работы является следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть функция  $F(x)$ , определяющая гомеоморфизм  $f$ , удовлетворяет условиям  $a_1) - a_5)$  и число вращения  $\rho_f$  иррационально. Тогда инвариантная мера  $\mu_f$  сингулярна относительно меры Лебега  $\ell$ , т. е. существует  $A \subset S^1$ , такое, что  $\mu_f(A) = 1$  и  $\ell(A) = 0$ .

- [1] Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
  - [2] Джалилов А.А., Ханин К.М. Об инвариантной мере для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома. Функ. Анал. и его прил. 32,(3), 153-161, 1998.
  - [3] Dzhaliilov A.A., Liousse I. Circle homeomorphisms with two break points. Nonlinearity. 19, 1951-1968, 2006.
-