В.І. Рукасов, *Є.С. Сілін* (Слов'янський держ. пед. ун-т, Слов'янськ, Україна)

Апроксимація операторами Валле Пуссена функцій, локально інтегровних на дійсній осі

Нехай $\widehat{L}$ — простір функцій f, які вимірні на R і мають скінченну норму: $||f||_{\widehat{L}} = \sup\limits_{a\in R} \int\limits_{a}^{a+2\pi} |f(t)|\ dt$ (див. [1]). Під $\widehat{C}$ розуміємо підмножину неперервних функцій з $\widehat{L}$. $\mathcal{A}$ означає множину функцій ψ, які задовольняють наступні умови: 1) $\psi(v) \geq 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(v)$ зростає та неперервна на $[0, 1)$; 2) $\psi(v)$ опукла на $[1, \infty)$ й $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$; 3) $\psi'(v + 0)$ має обмежену варіацію на $[0; \infty)$. $\mathcal{A}' := \left\{\psi \in \mathcal{A} : \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\psi(v)}{v}\ dv < \infty\right\}$. Для пари $\psi_1 \in \mathcal{A}$, $\psi_2 \in \mathcal{A}'$ покладемо $\overline{\psi} := \psi_{1+} + i\psi_{2-}$, де ψ_{1+} і ψ_{2-} — парне та непарне продовження ψ_1 і ψ_2 відповідно. Якщо функція $f \in \widehat{C}$ може бути представлена як $f(x) = A + \int\limits_{R} \varphi(x + t)\frac{1}{2\pi} \int\limits_{R} \overline{\psi}(s)e^{-ist}dsdt$, де $A = \mathrm{const}$, $\int\limits_{R} = \lim\limits_{a\to\infty} \int\limits_{-a}^{a}$, $\varphi \in S_\infty := \{\varphi : \operatorname{ess\,sup} |\varphi(t)| \leq 1\}$, то, наслідуючи [2], ми кажемо: 1) функція $\varphi(\cdot)$ є $\overline{\psi}$-*похідною* функції $f(\cdot)$ і позначаємо $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$; 2) $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty$. Для $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty$ також означимо $V_{\sigma,h}(f; x) = A + \int\limits_{R} f^{\overline{\psi}}(x + t)\frac{1}{2\pi} \int\limits_{R} \lambda_{\sigma,h}(s)\overline{\psi}(s)e^{-ist}dsdt$ — *оператор Валле Пуссена*, де $0 < h = h(\sigma) < \sigma < \infty$, $\lambda_{\sigma,h}(s) = 1$ якщо $0 \leq |s| \leq \sigma - h$, $\frac{\sigma-|s|}{h}$ якщо $\sigma - h \leq |s| \leq \sigma$, 0 у випадку $\sigma \leq |s|$. Кожній функції $\psi \in \mathcal{A}$ поставимо у відповідність функцію $\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$. Тоді $\overline{F} := \{\psi \in \mathcal{A} : \eta'(t) \leq K\}$, де K — деяка стала (яка, можливо, залежить від функції ψ).

Теорема 1. *Нехай* $\psi_i \in \overline{F},\ i = 1, 2$ *та виконана умова*

$$|\psi_2(t)||\ln(\eta(\psi_2; t) - t)| \leq O(1)|\psi_1(t)|, \quad \sigma \to \infty. \tag{1}$$

Тоді для дійсних чисел $\sigma > h \geq 1$ *при* $\sigma \to \infty$ *справджується формула*

$$\sup_{f\in\widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty} \|f(x)-V_{\sigma,h}(f; x)\|_{\widehat{C}} = \frac{4|\psi_1(\sigma)|}{\pi^2} \left|\ \ln \frac{\eta(\psi_1; \sigma) - \sigma}{h}\ \right| + O(1)(|\psi_1(\sigma-h)|+|\psi_1(\sigma)|), \tag{2}$$

де O(1) — величина, рівномірно обмежена щодо σ, h. *Якщо ж замість умови (1) виконується умова* $|\psi_1(t)||\ln(\eta(\psi_1; t) - t)| \leq O(1)|\psi_2(t)|$, *то в правій частині (2) необхідно замінити* $\psi_1(\cdot)$ *на* $\psi_2(\cdot)$.

[1] Stepanets A.I., Wang Kunyang, Zhang Xirong Approximation of locally integrable function on the real line // Ukr. Math. J. — 1999. — **51,** №11. — P. 1549–1561.

[2] Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 т. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т.2. — 468 с.