В.П. Ревенко (ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, Львів; victorrev@ukr.net)

Про функціонально-аналітичний метод розв'язування крайової задачі для диференціальних рівнянь

Використання систем неортогональних функцій, методу найменших квадратів і числової мінімізації введених квадратичних форм дозволяє запропонувати єдиний ефективний алгоритм розв'язування крайових задач як для рівнянь у часткових похідних [1, 2], так і диференціальних рівнянь. Модифікуємо основні ідеї цього підходу до розв'язування двоточкової задачі для диференціального рівняння n-го порядку

$$Ty \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \tag{1}$$

з граничними умовами

$$y(l_1)^{(k)} = y_{1k},\ k = \overline{0,m};\quad y(l_2)^{(k)} = y_{2k},\ k = \overline{0, n-m-2}, \tag{2}$$

де $f(x)$, $p_k(x) \in C([l_1,\, l_2])$, $k = \overline{0,n}$; $p_0(x) > 0$, $x \in [l_1,\, l_2]$.

Наближений розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді суми ряду Фур'є

$$y(x) = \phi_N(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k \varphi_k(x),$$

де c_k – невідомі коефіцієнти; N – задає кількість коефіцієнтів розкладу; $\varphi_k(x) = \cos(2\pi x/(B-A))$ для нуля і парних індексів k, $\varphi_k(x) = \sin(2\pi x/(B-A))$ для непарних; $[l_1,\, l_2] \in [A, B]$. Відзначимо, що вибрана нами система функцій $\{\varphi_k(x)\}$ в $L_2[l_1,\, l_2]$ буде повною, але не ортогональною.

Невідомі коефіцієнти c_k будемо шукати із мінімуму такого функціоналу [1, 2]

$$\Psi_N\{c_0, \ldots c_N\} = \|T\,\phi_N(x) - f(x)\|^2 + \sum_{j=1}^{m}[\phi_N(l_1)^{(j)} - y_{1j}]^2 + \sum_{j=1}^{n-m}[\phi_N(l_2)^{(j)} - y_{2j}]^2, \tag{3}$$

де $\|\phi(x)\| = \sqrt{\int_{l_1}^{l_2} \phi(x)^2 dx}$ – норма у метриці $L_2[l_1,\, l_2]$;

Таким чином, розв'язування крайової задачі (1), (2) зведено до мінімізації квадратичної форми (3), числове значення якої характеризує відхилення наближеного розв'язку від точного.

Теорема. *Якщо розв'язок задачі (1), (2) існує і є единий у просторі $C^n[l_1,\, l_2]$, то границя наближених розв'язків $\phi(x) = \lim_{N\to\infty} \phi_N(x)$ співпадає з ним.*

Доведено збіжність методу. Наведено оцінки точності задоволення рівняння (1) і граничних умов (2). Числове розв'язування типової граничної задачі демонструє ефективність і високу точність запропонованого методу.

[1] Revenko, V.P. // International Applied Mechanics. — 2008. — **44**, N 1.

[2] Ревенко В.П. // Вісник Дніпропетр. Ун-ту. Механіка. — 2008. — № 5. — Вип. 12.