

В.М. Про́кіп (ІППММ НАН України, ЛМІ, м.Львів, vprokip@mail.ru)

Про спільні дільники матриць над областю головних ідеалів

Нехай R_n – кільце $(n \times n)$ -матриць над областю головних ідеалів R з одиницею $e \neq 0$; I_k – одинична матриця порядку k ; O – нульова матриця порядку n ; $UT(n, R)$ і $LT(n, R)$ – мультиплікативні групи верхніх та нижніх трикутних матриць порядку n над R відповідно. Неособливу матрицю $D \in R_{n,n}$ будемо називати регулярною, якщо $D \in GL(n, R)$.

Кажуть, що матриці $A, B \in R_n$ мають спільний лівий дільник, якщо вони допускають факторизації $A = DA_1$ і $B = DB_1$, де $D \in R_n$ – регулярна матриця. Нижче вкажемо умови існування спільних лівих дільників матриць над R .

Нехай $A, B \in R_n$ матриці з формами Сміта $S_A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_r, 0, \dots, 0)$ та $S_B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_k, 0, \dots, 0)$ відповідно. Якщо для матриць $A, B \in R_n$ виконується рівність $\text{rank } A = \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$, то для них існують матриці $U, V_1, V_2 \in GL(n, R)$ такі, що (див. [1])

$$UAV_1 = S_A, \quad UBV_2 = \text{diag}(T, I_{n-k})S_B, \quad (1)$$

де $T = [t_{ij}] \in LT(k, R)$ і t_{ij} належать класу лишків за модулем ідеалу (b_i/b_j) , $1 \leq j < i \leq k$, (у якому нульовий клас зображено нулем області R). З огляду на сказане вище отримуємо.

Теорема 1. Нехай для матриць $A, B \in R_n$ $\text{rank } A = \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$, тобто для них виконуються рівності (1). Нехай, далі, $S_A = F\Phi$ і $S_B = F\Psi$, де $F = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) \in R_n$ – регулярна d -матриця, тобто $d_1 | d_2 | \dots | d_n$. Для матриць A і B існує спільний лівий дільник D з формою Сміта $S_D = F$ тоді і тільки тоді, коли існує матриця $G = [g_{ij}] \in LT(n, R)$, де g_{ij} належать класу лишків за модулем ідеалу (b_i/b_j) , $1 \leq j < i \leq n$ така, що $G^{-1}S_A = FC_1$ і $G^{-1}\text{diag}(T, I_{n-k})S_B = FC_2$.

Наслідок. Нехай для матриць $A, B \in R_{n,n}$ $\text{rank } A = \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$, тобто для них виконуються рівності (1). Нехай, далі, $S_A = F\Phi$ і $S_B = F\Psi$, де $F = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) \in R_n$ – регулярна d -матриця, тобто $d_1 | d_2 | \dots | d_n$. Якщо $\text{diag}(G^{-1}, I_k)S_A = FC_1$, то для матриць A і B існує спільний лівий дільник D з формою Сміта $S_D = F$.

Очевидно, що не завжди пару матриць $A, B \in R_n$ можна звести до вигляду (1). Оскільки множина спільних лівих дільників матриць $A, B \in R_n$ співпадає з множиною лівих дільників матриці $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$, то на підставі теореми 2 із [1] отримуємо наступне твердження.

Теорема 2. Нехай $A, B \in R_n$. Нехай, далі, $F = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) \in R_n$ – регулярна d -матриця є дільником форми Сміта S_C матриці $C = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} S_A & O \end{bmatrix} V$, де $U \in GL(n, R)$ і $V \in GL(2n, R)$. Тоді множина спільних лівих дільників з формою Сміта F матриць A і B описується матрицями виду $D = UQTFW$, де $Q \in UT(n, R)$, $T = [t_{ij}] \in LT(n, R)$, де t_{ij} належать класу лишків за модулем ідеалу (d_i/d_j) , $(1 \leq j < i \leq n)$, і $T^{-1} \begin{bmatrix} S_C & O \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} G & O \end{bmatrix}$, $W \in GL(n, R)$.