Роман Владимирович Подвысоцкий (Житомирский государственный университет имени Ивана Франка, Украина)

Разделяющие преобразования и квадратичные дифференциалы в экстремальных задачах о неналегающих областях

В данной работе предложен новый подход к решению некоторых экстремальных задач соответствующим квадратичным дифференциалам со свободными полюсами (см.например [1]).

1. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$ обозначают множества натуральных и комплексных чисел соответственно.

Тогда $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ есть расширенная комплексная плоскость или сфера Римана.

Набор точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C}/\{0\}$, удовлетворяющий условию

$$0 = arga_1 < arga_2 < arga_3 \ldots < arga_n < 2\pi$$

будем называть n – лучевой системой точек. Рассмотрим области

$$E_k = \{w : arga_k < argw < arga_{k+1}\},$$

$$k = \overline{1,n}, \quad E_{n+1} := E_1, \quad arga_{n+1} = 2\pi, \quad arga_{n+2} = arga_2 + 2\pi.$$

$\theta_k = \frac{1}{\pi} arg \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $k = \overline{1,n}$. Отсюда следует, что $\sum_{k=1}^{n} \theta_k = 2$. Пусть $\xi = \pi_k(w)$ – обозначает ту однозначную ветвь многозначной аналитической функции $\xi = -i(e^{-iarga_k}w)^{1/\theta_k}$, которая однолистно отображает область E_k на правую полуплоскость $Re\xi > 0$. Внутренний радиус области B, $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ обозначим $r(B,a)$ (см.[2, 3]).

2.Рассмотрим задачу о максимуме функционала

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma > 0$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ – n – лучевая система точек на единичной окружности, $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ – с.н.о., $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$.

В общей постановке задача о максимуме $J_n(\gamma)$ предложена в [4] как открытая проблема. В случае $\gamma \in (0,1]$ эта задача решена в работе [3].

Теорема. *Пусть $\gamma_5 = 1,15$, $\gamma_6 = 1,3$, $\gamma_7 = 1,45$, $\gamma_n = 1,5$, $n \geq 8$, $n \in N$. Тогда для каждого n, $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$, любой n – лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ единичной окружности и произвольной с.н.о. $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k (k = \overline{1,n})$ справедливо неравенство*

$$r^{\gamma_n}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq r^{\gamma_n}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

где $d_k = \exp i\frac{2\pi}{n}(k-1)(k=\overline{1,n})$. *Для каждого* $n \geq 5$ *знак равенства в этом неравенстве достигается когда точки* a_k *и области* $B_k(k=\overline{1,n})$ *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma_n)w^n+\gamma_n}{w^2(w^n-1)^2}dw^2.$$

Список литературы

[1] Дженкинс Дж.А. Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Издательство иностр.лит., 1962.—256с.

[2] Дубинин В.Н. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1988. – **168.** – С. 48 – 66.

[3] Дубинин В.Н. Емкости конденсаторов в геометрической теории функций: Учебн. пособие. – Владивосток: Издание Дальневосточного ун-та, 2003. – 116 с.

[4] Дубинин В.Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49** (295), № 1. – С. 3 – 76.