А.В. Плотников (Одес. акад. строит. и арх., Одесса, Украина)

Компактность множества достижимости управляемого нечеткого дифференциального включения

Введем в рассмотрение пространство $\mathbb{E}^n$ отображений $w : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $w-$ нормально; 2) $w-$ нечетко выпукло; 3) $w-$ полунепрерывно сверху; 4) замыкание множества $\{\xi \in \mathbb{R}^n : w(\xi) > 0\}$ компактно, с метрикой $D(w,v) = \sup\limits_{0\leq\alpha\leq 1} h([w]^\alpha, [v]^\alpha)$, где $[w]^\alpha-$ α – срезка отображения $w \in \mathbb{E}^n$, $h(\cdot,\cdot)-$ расстояние по Хаусдорфу.

Пусть поведение объекта описывается дифференциальным уравнением с нечеткой многозначной правой частью, содержащим управление

$$\dot{\xi} \in f(t,\xi,u),\ \xi(t_0) = \xi_0, \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ u \in U \subset \mathbb{R}^m$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{E}^n$.

Определение. Будем называть $x(\cdot,u) : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ нечеткой траекторией системы (1), соответствующей управлению $u(\cdot)$, если для любого $\alpha \in [0,1]$ и любого $t \geq t_0$ множество $X(t,u,\alpha) = [x(t,u)]^\alpha$ является сечением множества решений системы

$$\dot{\xi} \in [f(t,\xi,u(t))]^\alpha,\ \xi(t_0) = \xi_0 \tag{2}$$

в момент времени t.

Теорема. Пусть для системы (1) справедливы следующие условия :

1) $f(\cdot,\xi,u)$ измеримо на $[t_0,T]$;

2) $f(t,\cdot,u)$ удовлетворяет условию Липшица по ξ;

3) $f(t,\xi,\cdot)$ слабо непрерывно по u;

4) множество U выпукло и компактно в $\mathbb{R}^m$;

5) существует $l(\cdot) \in L_2^1[t_0,T]$ такое, что $|f(t,\xi,u)| \leq l(t)$ для почти всех $t \in [t_0,T]$;

6) если последовательность $\{u_p(\cdot)\}_{p=1}^\infty$ слабо сходится к $u_*(\cdot)$, то последовательность $\{f(\cdot,\xi(\cdot),u_p(\cdot))\}_{p=1}^\infty$ слабо сходится к $f(\cdot,\xi(\cdot),u_*(\cdot))$ для любой непрерывной функции $\xi(\cdot)$;

7) для всех $\alpha \in [0,1], a,b \geq 0,\ a+b=1,\ u \in U$, для почти всех $t \in [t_0,T]$ и любых $\xi_1,\xi_2 \in \mathbb{R}^n$ выполняется условие

$$a[f(t,\xi_1,u)]^\alpha + b[f(t,\xi_2,u)]^\alpha \subset [f(t,a\xi_1+b\xi_2,u)]^\alpha.$$

Тогда множество достижимости $Y(T) = \{x(T,u) : u \in U\}$ системы (1) компактно в пространстве $\mathbb{E}^n$, т.е. $Y(T) \in comp\ (\mathbb{E}^n)$.