Р. Пиров (Таджикский Государственный Педагогический Университет, Душанбе, Таджикистан)

О совместности и многообразиях решения некоторых нелинейных систем уравнений второго порядка с одной неизвестной функцией в трехмерном пространстве

Рассмотрим систему

$U_{xx}, U, U_{xz}, U_{yz} = f^i\left(x, y, z; U, U_x, U_y, U_z, U_{yy}, U_{zz}\right), \quad i = \overline{1,4}$(1) где $f^i \in C^2(\prod), \quad i = \overline{1,4},\ U \in C^4(\prod),\ \prod = \left\{(x, y, z):\ |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le a,\ |z - z_0| \le a, |U - U_0| \le b\right\}.$

Остальные типы систем этого класса исследуются аналогично и для них справедлива качественно одинаковые результаты

В силу замены $U_x = p, \quad U_y = q, \quad U_z = W, \quad U_{yy} = q_y = \tau, \quad U_{zz} = W_z = \theta$, система (1) преобразуется к квазилинейной системе

$$\begin{cases} U_x = p, \quad U_y = q, \quad U_z = W, \quad p_x, p_y, p_z = f^i, \quad i = \overline{1,3}, \\ q_x = f^2, \quad q_y = \tau, \quad q_z = f^4, \quad W_x = f^3, \quad W_y = f^4, \quad W_z = \theta. \end{cases} \tag{1}$$

Равенства $U_{xy} = U_{yx}, \quad U_{yz} = U_{zy}$ и $U_{xz} = U_{zx}$ выполняются автоматически, а $p_{xy} = p_{yx},\ \ q_{xy} = q_{yx},\ \ W_{xy} = W_{yx}, \quad p_{xz} = p_{zx}, \quad q_{xz} = q_{zx}, \quad W_{xz} = W_{zx},\ p_{yz} = p_{zy}, \quad q_{yz} = q_{zy}, W_{yz} = W_{zy}$ приводят к девяти неразрешённых уравнений. Ранг матрицы 6x9

$$A = \begin{Vmatrix} -f_\tau^2 & f_\tau^1 & 0 & f_\theta^2 & f_\theta^1 & 0 \\ 1 & -f_\tau^2 & 0 & 0 & -f_\theta^2 & 0 \\ -f_\tau^4 & f_\tau^3 & 0 & -f_\theta^4 & f_\theta^3 & 0 \\ -f_\tau^3 & 0 & f_\tau^1 & f_\theta^3 & 0 & f_\theta^1 \\ -f_\tau^4 & 0 & f_\tau^2 & -f_\theta^4 & 0 & f_\theta^2 \\ 0 & 0 & -f_\tau^3 & 1 & 0 & -f_\theta^3 \\ 0 & -f_\tau^3 & f_\tau^2 & 0 & -f_\theta^3 & f_\tau^2 \\ 0 & -f_\tau^4 & 1 & 0 & -f_\theta^4 & 0 \\ 0 & 0 & -f_\tau^4 & 0 & 1 & -f_\tau^4 \end{Vmatrix}$$

составленной из коэффициентов при производных $\tau_x, \tau_y, \tau_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ в некоторой окрестности точки $\left(x_0, y_0, z_0;\ U_0, U_x^0, U_y^0, U_z^0, U_{xx}^0, U_{yy}^0, U_{zz}^0\right)$ равен 6 поэтому из тех уравнений можно найти

$$\tau_x, \tau_y, \tau_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z = f^k(x, y, z;\ U, p, q, W, \tau, \theta),\ k = \overline{5,10}. \tag{2}$$

Правые части (2) определенным образом выражены через $f^1 - f^4$ и их производных. Объединяя (1) и (2) приходим к п.д. – системе относительно шести неизвестных функций $U,\ p = U_x, \quad q = U_y, \quad W = U_z, \quad \tau = U_{yy}, \quad \theta = U_{zz}$. Доказана, что при $f^i \in C^2\left(\right), U \in C^4\left(\right)$ и тождественном выполнении шести найденных явных условий совместности $H^i\left(x, y, z;\ U, , q, W, \tau, \theta\right) = 0, \quad i = \overline{1,6}$
задача (1) и $U_0 = C_{1,} \quad U_x^0 = C_2,\ U_y^0 = C_3,\ U_z^0 = C_4,\ U_{yy}^0 = C_5,\ U_{zz}^0 = C_6$ однозначно разрешима.