

О.В. Овчаренко (НТУУ «КПІ»)

## Узагальнена бета-функція

За останні роки значною мірою посилюється інтерес до запровадження та вивчення нових узагальнень спеціальних функцій. Зокрема запроваджуються узагальнення гіпергеометричних функцій, гамма та бета функцій, функцій Лежандра та ін.[2] Такі функції дозволяють розв'язувати нові складніші задачі математичної фізики, теорії ймовірностей, математичної статистики та інших наук.

Запровадимо  $(\tau, \beta)$ -узагальнену бета функцію у вигляді:

$$B^{\tau, \beta} \left( \begin{matrix} a, b; c; v \\ d, h \end{matrix} \right) = v^{-a} \int_0^{\infty} x^{d-1} (1+x)^{-h-d} {}_2F_1^{\tau, \beta} \left( a, b; c; -\frac{x}{v} \right) dx, \quad (1)$$

де  $a, b, c$  - комплексні параметри,  $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ ,  $\operatorname{Re}(a+h) > 0$ ,  $\operatorname{Re}(b+h) > 0$ ,  $|\arg v| < \pi$ ,  $\{\tau, \beta\} \subset \mathbb{R}$ ,  $\tau > 0, \beta > 0$ ,  $\tau - \beta < 1$ ,  $c \neq 0, -1, -2, \dots$ ,  $\operatorname{Re} d > 0$ ,  ${}_2F_1^{\tau, \beta}(z) - (\tau, \beta)$ -узагальнена гіпергеометрична функція Гаусса [1].

Зауважимо, що при  $a=0, b=c, \tau=\beta=1$  формула (1) перетворюється в означення добре відомої бета функції  $B(d, h)$ .

**Лема 1.** Для функції  $B^{\tau, \beta}$  мають місце наступні рекурентні співвідношення:

$$c B^{\tau, \beta} \left( \begin{matrix} a, b; c; v \\ d, h \end{matrix} \right) - (c - \beta a) B^{\tau, \beta} \left( \begin{matrix} a, b; c+1; v \\ d, h \end{matrix} \right) - a \beta v B^{\tau, \beta} \left( \begin{matrix} a+1, b; c+1; v \\ d, h \end{matrix} \right) = 0; \quad (2)$$

$$(c - a\beta - 1) B^{\tau, \beta} \left( \begin{matrix} a, b; c; v \\ d, h \end{matrix} \right) = (c-1) B^{\tau, \beta} \left( \begin{matrix} a, b; c-1; v \\ d, h \end{matrix} \right) - a \beta v B^{\tau, \beta} \left( \begin{matrix} a+1, b; c; v \\ d, h \end{matrix} \right); \quad (3)$$

$$((c-1)\tau - \beta b) B^{\tau, \beta} \left( \begin{matrix} a, b; c; v \\ d, h \end{matrix} \right) = (c-1) B^{\tau, \beta} \left( \begin{matrix} a, b; c-1; v \\ d, h \end{matrix} \right) - b \beta B^{\tau, \beta} \left( \begin{matrix} a, b+1; c; v \\ d, h \end{matrix} \right) \quad (4)$$

[1] Вірченко Н.О., Рум'янцева О.В. Про узагальнену гіпергеометричну функцію Гауса та її застосування // Доповіді НАН України. – 2008. - №4. - С.12-19.

[2] Virchenko N.A. On some generalizations of the functions of hypergeometric type // FCAA. – 2001. – 2, No3. – PP. 233-244.