Виктор Остапенко (Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, Украина)

Метод асимптотического решения нелинейных задач сорбции с переменными параметрами сорбентов

В современной практике фильтрования, особенно в случае применения нанофильтров, используются сорбенты, которые обладают нелинейными изотермами сорбции. В этой связи в достаточно общем виде может быть поставлена следующая краевая задача теории сорбции. В области $x > 0$; $t > 0$ найти решение системы уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \gamma(x,t)\rho(x,t) + \nu(x,t)C(x,t) + \varepsilon F(x,t,\rho,C); \\ &\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \alpha(x,t)\rho(x,t) + \beta(x,t)C(x,t) + \varepsilon f(x,t,\rho,C), \end{aligned} \tag{1}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$C(0,t) = \varphi(t),\ t > 0;\ \ \rho(x,0) = \psi(x),\ x > 0. \tag{2}$$

Здесь $C(x,t)$ и $\rho(x,t)$ соответственно концентрация фильтруемого вещества в растворе и концентрация фильтруемого вещества, поглощаемого фильтром,, ε – малый параметр. В предположении, что функции $F(x,t,\rho,C)$ и $f(x,t,\rho,C)$ могут быть представлены по формуле Тейлора относительно аргументов ρ и C в окрестности порождающего решения $\rho_0(x,t)$, $C_0(x,t)$ для некоторого m, поставленная краевая задача может быть решена методом возмущений в форме разложений по малому параметру ε:

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= \rho_0(x,t) + \rho_1(x,t)\,\varepsilon + \rho_2(x,t)\,\varepsilon^2 + \rho_3(x,t)\,\varepsilon^3 + \cdots \\ C(x,t) &= C_0(x,t) + C_1(x,t)\,\varepsilon + C_2(x,t)\,\varepsilon^2 + C_3(x,t)\,\varepsilon^3 + \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

В результате для коэффициентов разложения (3) возникают задачи об интегрировании системы уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial C_n(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial \rho_n(x,t)}{\partial t} + \gamma(x,t)\rho_n(x,t) + \nu(x,t)C_n(x,t) + G_n; \\ &\frac{\partial \rho_n(x,t)}{\partial t} = \alpha(x,t)\rho_n(x,t) + \beta(x,t)C_n(x,t) + g_n, \end{aligned} \tag{4}$$

$n = 0,1,2,\ldots$, при краевых условиях

$$C_0(0,t) = \varphi(t),\ t > 0;\ \ \rho_0(x,0) = \psi(x),\ x > 0. \tag{5}$$

$$C_i(0,t) = 0,\ t > 0;\ \ \rho_i(x,0) = 0,\ x > 0, \qquad i = 1,2,\ldots \tag{6}$$

Для каждой пары функций C_n и ρ_n такого рода краевые задачи могут быть преобразованы к двум самостоятельным задачам Гурса для телеграфных уравнений

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial t} - a\frac{\partial C}{\partial x} - b\frac{\partial C}{\partial t} + cC = F_C\ ; \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial t} - a_1\frac{\partial \rho}{\partial x} - b_1\frac{\partial \rho}{\partial t} + c_1\rho = F_\rho \tag{8}$$

с краевыми условиями, заданными на характеристиках уравнений (7) и (8).

Основным методом решения задач Гурса является метод Римана. Этот метод требует построения функций Римана, для уравнений, сопряженных с уравнениями (7) и (8). Построение функции Римана для телеграфных уравнений общего вида представляет собой достаточно сложную и не разрешенную до настоящего времени проблему. Однако существует такой подкласс уравнений, для которых функция Римана может быть построена. Речь идет о таком подклассе сопряженных уравнений

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + a\frac{\partial v}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial t} + hv = 0, \tag{9}$$

которые преобразованием искомой функции

$$v(x,t) = w(x,t)\ Q(x,t) \tag{10}$$

могут быть приведены к виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + Hw = 0. \tag{11}$$

Для того чтобы это было возможно, необходимо и достаточно чтобы были выполнены условия

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial t}\ ; \quad H = -\frac{\partial a}{\partial x} - ab + h = const\,. \tag{12}$$

В этом случае каждая из задач Гурса для уравнений (7) и (8) интегрируется в квадратурах, позволяя получить явные выражения для всех коэффициентов разложений (3).

Однако и в том случае, когда условия (12) выполнены только для одного из уравнений (7) или (8), решение задачи в целом также может быть получено в квадратурах. Это можно осуществить следующим способом. Необходимо рассматривать приведение к проблеме Гурса задачу о нахождении только одной искомой функции: концентрации C_n или плотности ρ_n. Пусть одна из этих функций найдена, например ρ_n. Тогда концентрация C_n может быть найдена как решение задачи Коши для первого уравнения (4), в правую часть которого подставлена найденная функция ρ_n, с начальными условиями в виде первых равенств (5) или (6). В этом случае для отыскания C_n вообще не требуется строить функцию Римана, поэтому класс задач, разрешимых этим методом существенно расширяется.

Приведены примеры асимптотического решения задач сорбции изложенным здесь методом.