С.С. Мирзоев (Бакинский Государственный Университет)

Об одной краевой задаче в пространстве голоморфных вектор-функций

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d^2u(\tau)}{d\tau^2} - A^2u(\tau) + A_1\frac{du(\tau)}{d\tau} = f(\tau), \quad \tau \in S_\alpha, \quad u(0) = Tu'(0), \tag{1}$$

где A-положительно-определенный самосопряженный оператор, A_1-линейный оператор, $S_\alpha = \left\{\tau : |\arg\tau| < \alpha < \frac{\pi}{2}\right\}$, $f(\tau)$ и $u(\tau)$- голоморфные в S_α вектор-функции со значениями в H, T- линейный ограниченный оператор, действующий из $H_{1/2}$ в $H_{3/2}$, $H_\gamma = D(A^\gamma)$ с нормой $\|x\|_\gamma = \|A^\gamma x\|, \gamma \geq 0$, а производные понимаются в смысле комплексного анализа в пространстве H.

Обозначим через $H_{2,\alpha}$ гильбертовы пространство голоморфных вектор-функций $f(\tau)$ в S_α, для которых $f(te^{i\varphi}) \in L_2(R_+, H)$ при $\varphi \in [-\alpha, \alpha]$, с нормой

$$\|f\|_{H_{2,\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left\|f\left(te^{i\alpha}\right)\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|f\left(te^{-i\alpha}\right)\right\|^2_{L_2(R_+;H)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим $W^T_{2,\alpha} = \left\{u(\tau) : A^2u(\tau) \in H_{2,\alpha}, u(0) = Tu'(0)\right\}$,

с нормой $\|u\|_{W_{2,\alpha}} = \left(\|A^2u(\tau)\|^2_{H_{2,\alpha}} + \left\|\frac{d^2u(\tau)}{d\tau^2}\right\|^2_{H_{2,\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Теорема.*Пусть* $B_1 = A_1A^{-1}$ *ограничен в* H, *оператор* $E - TA$ *имеет ограниченный обратный оператор в* $H_{3/2}$ *и* $\|B_1\| \leq N^{-1}_{T,\alpha}$, *где*

$$N_{T,\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{2\cos\alpha}, & \textit{если} \quad Re\,(ATx, x)_{\frac{1}{2}} \geq 0, \forall x \in H_{1/2}, \\ \frac{1}{2\cos\alpha}\left(1 - 4\left|\inf\limits_{\|x\|=1}\frac{Re(ATx,x)_{\frac{1}{2}}}{\|ATx\|^2_{\frac{1}{2}}+1}\right|^2\right)^{-\frac{1}{2}} & \textit{в обратном случае.} \end{cases}$$

Тогда при любом $f(\tau) \in H_{2,\alpha}$ *существует единственная вектор-функция* $u(\tau) \in W^T_{2,\alpha}$, *которая удовлетворяет уравнению из (1) в* S_α *тождественно.*

Отметим, что здесь число $N_{T,\alpha}$ есть норма оператора $A\frac{d}{d\tau} : W^T_{2,\alpha} \to H_{2,\alpha}$.