К.О.Махмудов (Самаркандский государственный университет)

Формула Карлемана для уравнения Гельмгольца

Рассматривается задача Коши для уравнения Гельмгольца в ограниченной области с данными Коши, известными только на участке границы области. Для решения этой задачи выводится формула типа Карлемана и приводится критерий разрешимости для шара.

Пусть $B_R = B(0,R)$-шар в R^3, с центром в нуле радиуса $0 < R < \infty$ и S-гладкая поверхность в B_R, разбивающая ее на две связные компоненты D^+ и D^- и ориентированная как граница D^-. В заметки приведена формула Карлемана для восстановления решения уравнения Гельмгольца в D^- по ее данным Коши на S. т. е.

Для функции $u(x) \in C^2(D^-) \cap C^1(\overline{D^-})$ рассмотрим задачу Коши для уравнения Гельмгольца в D^-

$$\begin{gathered} \Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \quad x \in D^-, \\ u(x)\big|_S = u_0(x); \quad \left.\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right|_S = u_1(x) \end{gathered} \tag{1}$$

где $\forall\ k = const$, k^2 - действительное число.

Формулы, позволяющие находить решение эллиптического уравнения в случае, когда данные Коши известны лишь на части границы области, получит название формул типа Карлемана [1].

Формула типа Карлемана, в которой используется фундаментальное решение дифференциального оператора со специальными свойствами (функция Карлемана), была получена М.М. Лаврентьевым [2]. Применяя этот метод Ш.Я. Ярмухамедов [3] построил функции Карлемана для операторов Лапласа и Гельмгольца для пространственных областей специального вида, когда часть границы области, где данные неизвестны конической поверхностью либо гиперповерхностью $\{x_3 = 0\}$.

[1] Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962.
[2] Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа //Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т.20. №6. С. 819 – 842
[3] Ярмухамедов Ш.Я., Ишанкулов Т.И., Махмудов О.И. О задачи Коши для системы уравнений теории упругости в пространстве // Сиб. Матем. Ж. 1992. Т.33.№1.С.186 – 190.