Л.М. Гук

Про метод розв'язання одновимірної задачі конвективної дифузії для моделей стану атмосфери

Математичні моделі процесів та явищ, що мають місце в атмосфері Землі, як правило, описуються рівняннями Нав'є-Стокса, збереження енергії турбулентності, стану середовища, фазових переходів вологи, тепло- та масопереносу. В загальному випадку більшість цих рівнянь є трьохвимірними рівняннями конвективної дифузії. Після застосування до них розщеплення за просторовими напрямками, проблема ефективної реалізації моделі зводеться до ефективного розв'язання послідовності одновимірних задач вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t}+v(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(x,t),\ \mu(x,t)\geq 0 \quad 0\leq x\leq \ell,\quad t>0, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\eta(x),\quad 0\leq x\leq \ell,\quad u(0,t)=\alpha(t)\ ,\quad u(\ell,t)=\beta(t)\ ,\quad t>0. \tag{2}$$

Аналіз особливостей реалізації задачі (1) – (2) для згаданих моделей дозволив сформулювати вимоги до чисельного методу розв'язання: прийнятні точність та обмеження на часовий крок; нечутливість методу до зміни типу рівняння (1) та знаку швидкості конвекції в межах розрахункової області; відносно малі затрати часу на отримання розв'язку.

В роботі [1] запропоновано скінченно-різницеву схему, що апроксимує задачу (1) – (2) та задовольняє поставленим вимогам:

при $v\geq 0$: $$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}+\frac{v_i^n}{2}\left[\frac{y_{i+1}^n-y_i^n}{h}+\frac{y_i^{n+1}-y_{i-1}^{n+1}}{h}\right]-$$

$$-\frac{1}{2h}\left[\left(\mu_{i+1}^n+\mu_i^n\right)\frac{y_{i+1}^n-y_i^n}{h}-\left(\mu_i^n+\mu_{i-1}^n\right)\frac{y_i^{n+1}-y_{i-1}^{n+1}}{h}\right]=f_i^n,\quad i=1,2,\ldots,N-1;\quad n=0,1,\ldots; \tag{2}$$

$$y_i^0=\eta(x_i),\quad i=0,1,\ldots,N;\ y_0^{n+1}=\alpha\left(t^{n+1}\right),\ \ y_N^{n+1}=\beta\left(t^{n+1}\right),\quad n=0,1,\ldots,$$

при $v<0$: $$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}+\frac{v_i^n}{2}\left[\frac{y_{i+1}^{n+1}-y_i^{n+1}}{h}+\frac{y_i^n-y_{i-1}^n}{h}\right]-$$

$$-\frac{1}{2h}\left[\left(\mu_{i+1}^n+\mu_i^n\right)\frac{y_{i+1}^{n+1}-y_i^{n+1}}{h}-\left(\mu_i^n+\mu_{i-1}^n\right)\frac{y_i^n-y_{i-1}^n}{h}\right]=f_i^n,\ i=N-1,\ N-2,\ldots,\ 2,\ 1;\quad n=0,1,\ldots; \tag{3}$$

$$y_i^0=\eta(x_i),\quad i=0,1,\ldots,N;\ y_0^{n+1}=\alpha\left(t^{n+1}\right),\ \ y_N^{n+1}=\beta\left(t^{n+1}\right),\quad n=0,1,\ldots$$

Схема дозволяє будувати розв'язок за алгоритмом реалізації явних схем, так званим явним рахунком, що дозволяє мінімізувати витрати машинного часу на розв'язання задачі. Також розглянуто випадок зміни знаку швидкості конвекції. Чисельний алгоритм передбачає зміну типу рівняння (1). Чисельний розв'язок є безумовно стійким та умовно збігається до розв'язку задачі (1) – (2) з порядком $O\left(\tau+h^2+\tau/h\right)$ [2].

[1] *Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.И., Гук Л.Н.* Эффективная разностная схема численного решения задачи конвективной диффузии. // Кибернетика и системный анализ, 2007, №3, С. 64 – 74.

[2] *Гук Л. М.* Стійкість та збіжність економічного методу розв'язання одновимірної задачі конвективної дифузії. // Вісник Київського університету, серія: фізико-математичні науки, 2008, №4, С. 115 - 118.