

А.П. Голуб (Інститут математики НАН України, Київ, Україна)

Апроксимації Паде функцій типу Міттаг–Леффлера

Цілі функції типу Міттаг–Леффлера визначаються степеневими рядами

$$E_\rho(z; \nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho} + \nu\right)}, \quad (1)$$

де ρ та ν — деякі невід’ємні параметри, і є важливими для теорії інтегральних перетворень та інтегральних зображень функцій в комплексній площині.

Апроксиманти Паде функцій $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, та $\operatorname{ch} z$, що можуть буди зображені через функції типу Міттаг–Леффлера зі значеннями параметрів $\rho = \frac{1}{2}$, $\nu = 1$, $\nu = 2$, були досліджені В. К. Дзяди́ком [1]. Надалі автором та М. М. Чипом результати В. К. Дзяди́ка були частково розповсюджені на функції типу Міттаг–Леффлера загального вигляду (для довільних ρ та ν) (див.[2]).

В цій роботі отримано асимптотичні рівності для похибок апроксимацій Паде функцій типу Міттаг–Леффлера $E_\rho(z; \nu)$ при $\nu > 0$, $0 < \rho < 1$ порядків $[N - 1/N]$, $N \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. Для похибок апроксимацій Паде функцій типу Міттаг–Леффлера $E_\rho(z; \nu)$, $0 < \rho < 1$, $\nu > 0$, порядків $[N - 1/N]$, $N \in \mathbb{N}$, мають місце асимптотичні рівності

$$E_\rho(z; \nu) - [N - 1/N]_f(z) = z^{2N} \frac{H_N}{H_{N-1}} \left(1 + O\left(\frac{|z|}{N^{\frac{1-\rho}{\rho}}}\right) \right), \quad N \rightarrow \infty,$$

де H_N , $N = \overline{0, \infty}$, — визначники Ганкеля послідовності коефіцієнтів $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ ряду (1):

$$H_N = \det \|s_{k+j}\|_{k,j=0}^N, \quad N = \overline{0, \infty}.$$

Теорема 2. В крузі $K_R = \{z : |z| \leq R\}$ довільного радіуса $R > 0$ для апроксимант Паде $[N - 1/N]_f(z)$, $N \in \mathbb{N}$, функції $f(z) = E_\rho(z; \nu)$, $0 < \rho < 1$, $\nu > 0$, та її найкращих раціональних апроксимант $[N - 1/N]_f^*(z)$ будуть справедливими нерівності:

$$\begin{aligned} \|f - [N - 1/N]_f^*\|_{C_{K_R}} &\leq \|f - [N - 1/N]_f\|_{C_{K_R}} \leq \\ &\leq \|f - [N - 1/N]_f^*\|_{C_{K_R}} \left(1 + O\left(\frac{Re^R}{N^{\frac{1-\rho}{\rho}}}\right) \right). \end{aligned}$$

[1] Дзядык В.К. Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ // Мат.сборник. — 1979. — **108**, №2. — С. 247–267.

[2] Голуб А.П. Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — К.: Ін-т математики НАН України, 2002. — 222 с.