

Федір Сохацький (Вінницький соціально-економічний інститут, Вінниця, Україна),
Ірина Фриз (Вінницький державний педагогічний університет, Вінниця, Україна)

Критерій оборотності схрещеного ізотопу квазігрупи

Відомо, що ізотоп квазігрупи також є квазігрупою. Проте схрещений ізотоп квазігрупи не завжди є квазігрупою. Більше того, всі односторонні квазігрупи схрещено ізотопні між собою. Тому природнім є питання про знаходження умов за яких схрещений ізотоп довільного групоїда є квазігрупою.

Нагадаємо, що операція f арності $n + 1$ називається i -схрещено ізотопною типу $\vec{i} := (i_0, \dots, i_k)$ або схрещено ізотопною типу $(m, \vec{i})$ до $(n + 1)$ -арної операції g , якщо $i_m = i \in \vec{i} \subseteq \{0, \dots, n\}$ і існує вибірка $\vec{\alpha} := (\alpha_0, \dots, \alpha_n, \alpha)$ підстановок $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \alpha$ та m -оборотна операція h арності $k + 1$ множини Q такі що

$$f(x_0, \dots, x_n) = \alpha^{-1} g(\alpha_0 x_0, \dots, \alpha_{i-1} x_{i-1}, \alpha_i h(x_{i_0}, \dots, x_{i_k}), \alpha_{i+1} x_{i+1}, \dots, \alpha_n x_n) \quad (1)$$

для всіх $x_0, \dots, x_n \in Q$, де $i_m = i$. При цьому будемо писати $f = g(\vec{\alpha}, h)$, $(\vec{\alpha}, h)$ схрещена ізотопія типу $(m, \vec{i})$ арності $k + 1$. [1, 2]

Нехай $\vec{i} = (i_1, \dots, i_k)$ — довільна підпослідовність послідовності $(0, \dots, n)$ і нехай m — довільне число із $\{0, \dots, k\}$, $i_m = i$. Тоді дві операції g і h , що визначені на Q , арності $n + 1$ і $k + 1$ відповідно називаються *ортогональними типу $(m, \vec{i})$* , якщо для будь-якого $j = i_p \in \vec{i}$, $j \neq i$ кожна із систем рівнянь

$$\begin{cases} h(a_{i_0}, \dots, a_{i_{m-1}}, x, a_{i_{m+1}}, \dots, a_{i_{p-1}}, y, a_{i_{p+1}}, \dots, a_{i_k}) = a, \\ g(a_0, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_n) = b \end{cases} \quad (2)$$

при $i < j$ та

$$\begin{cases} h(a_{i_0}, \dots, a_{i_{p-1}}, y, a_{i_{p+1}}, \dots, a_{i_{m-1}}, x, a_{i_{m+1}}, \dots, a_{i_k}) = a, \\ g(a_0, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) = b \end{cases} \quad (3)$$

при $i > j$, має єдиний розв'язок для всіх $a_0, \dots, a_n, a, b \in Q$.

Теорема. Схрещений ізотоп $f = g(\vec{\alpha}, h)$ типу $(m, \vec{i})$ операції g є квазігрупою, тобто оборотний, тоді і тільки тоді, коли операція g є j -оборотною для всіх $j \notin \vec{i}$ та g ортогональна типу $(m, \vec{i})$ до операції h .

- [1] Белоусов В.Д. Схрещенные изотопии квазигрупп. // Квазигруппы и их системы. Кишинев: Штиинца, 1990. С. 14-20.
 - [2] Сохацький Ф.М. Про схрещену ізотопію та схрещений ізоморфізм. Труды ИПММ НАН України: 2005, вип.11. С. 23-33.
-