В.И. Филиппенко (Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса, Шахты, Россия)

Обобщенные спектральные функции квазидифференциального оператора

Одной из проблем современной теории линейных операторов является задача исследования спектральных характеристик симметрического оператора. Различные подходы в этом направлении рассматривались в фундаментальных исследованиях Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана [1], Ю. М. Березанского [2], М. А. Наймарка [3] и других авторов.

В настоящей работе специфичное построение квазипроизводных и симметрического квазидифференциального выражения позволяет расширить класс операторов, для которых с помощью асимптотических методов можно исследовать природу спектра самосопряженного расширения минимального симметрического оператора.

Пусть $\mathbf{F} = (f_{ij}) - (n \times n)$ -матрица, составленная из комплекснозначных функций, удовлетворяющих следующим условиям:

- (1) $f_{ij} = 0$ в интервале I , если $2 \leq i + 1 < j \leq n$;
- (2) $f_{ij} \in \mathcal{L}_{loc}(I)$ для $1 \leq i, j \leq n$;
- (3) $f_{i,i+1} \neq 0$ в I для $1 \leq i \leq n - 1$;
- (4) $\mathbf{F} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}^*\mathbf{J}$, где $\mathbf{F}^*$ - сопряженная матрица и $\mathbf{J} = ((-1)^i \delta_{i,n+1-j})$, $1 \leq i, j \leq n$, где $\delta_{k,l}$ - символ Кронекера.

Определим квазипроизводные $y^{[k]}$ следующим образом [4]: $y^{[0]} = y$, при $i = 0$; и $y^{[i]} = f_{i,i+1}^{-1}((y^{[i-1]})' - \sum_{j=1}^i f_{i,j}y^{[j-1]})$, если $i = 1, \dots, n - 1$.

Пусть D - множество функций y , которые вместе с их квазипроизводными до $(n - 1)$ -го порядка включительно абсолютно непрерывны на любом компактном подынтервале из I . Определим на D квазидифференциальное выражение $l[y] = i^n y^{[n]}$, где i - мнимая единица, $y^{[n]} = (y^{[n-1]})' - \sum_{i=1}^n f_{ni}y^{[i-1]}$.

Для функций y и z , к которым применима квазидифференциальная операция l , имеют место обобщенные формулы Лагранжа и Грина.

Стандартные рассуждения позволяют получить следующие теоремы [3].

Теорема 1. Пусть $\mathbf{F} = (f_{ij}) - (n \times n)$ - матрица-функция, удовлетворяющая условиям (1) - (3) и $l[y] = i^n y^{[n]}$. Кроме того, $w, f \in \mathcal{L}_{loc}(I)$, где w - положительная функция на I . Тогда для любого комплексного λ , любого $x_0 \in I$ и любых комплексных $c_i, i = 0, 1, \dots, n - 1$, существует единственное решение y , заданное на I , начальной задачи $l[y] = \lambda \cdot w \cdot y + f$ и $y^{[i]}(x_0) = c_i$.

Теорема 2. Пусть $l[y] = i^n y^{[n]}$, матрица-функция $\mathbf{F}$ удовлетворяет требованиям (1) - (4). Тогда для любых комплексных чисел $\alpha_i, \beta_i, i = 0, \dots, n - 1$ существует функция $u \in D$, такая что для $a, b \in I$ выполняются условия $u^{[i]}(a) = \alpha_i, u^{[i]}(b) = \beta_i, i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Пусть функция $w(x) > 0$ и суммируема на конечном или бесконечном промежутке $I = (a, b)$. Обозначим через $H = \mathcal{L}_w^2(a, b)$ — гильбертово пространство функций, модуль квадрата которых суммируем с неотрицательным весом $w(x)$ на (a, b) . В дальнейшем будем считать, что D — максимальное линейное многообразие, на котором определена квазидифференциальная операция $w^{-1}l$. Функции $w^{-1}l[y]$ существуют почти всюду и локально интегрируемы на I .

Пусть $D'_0 = D'_0(L'_0)$ — множество всех финитных функций из многообразия D . Определим оператор L'_0 по формуле $w^{-1}l[f]$ для всех $f \in D'_0$. Замыкание оператора L'_0 обозначим через L_0 . Оператор L является, очевидно, расширением всех других операторов, порожденных квазидифференциальным выражением $w^{-1}l$. Оператор L является сопряженным к оператору L'_0 , т. е. $(L'_0)^* = L$. Следовательно, $L_0^* = L$.

Квазисамосопряженным расширением оператора L_0 , определяемым оператором V , называют оператор L_V , являющийся частью оператора L_0^* и имеющий область определения линейное многообразие $D(L_V)$ элементов вида $g = f + V\psi - \psi$, $f \in D(L_0)$, $\psi \in N_{\lambda_0}$, где N_{λ_0} — дефектное подпространство оператора L_0 .

Всякая обобщенная резольвента R_λ замкнутого симметрического оператора L_0 в гильбертовом пространстве H представима в виде [5]:

$$R_\lambda = (L_{K(\lambda)} - \lambda E)^{-1} \quad (\Im \lambda \cdot \Im \lambda_0 > 0), \quad (1)$$

где $K(\lambda)$ — некоторая аналитическая в полуплоскости $\Im \lambda \cdot \Im \lambda_0 > 0$ операторная функция параметра λ из N_{λ_0} в N_{λ_0} , не превосходящая по норме единицы; $L_{K(\lambda)}$ — квазисамосопряженное расширение оператора L_0 , определяемое оператором $K(\lambda)$. Обратно, для операторной функции $K(\lambda)$, обладающей перечисленными свойствами, формулой (1) определяется обобщенная резольвента оператора L_0 . Каждой функции $K(\lambda)$ соответствует обобщенная резольвента.

Обобщенной спектральной функции E_t ($-\infty < t < +\infty$) симметрического оператора L_0 , порожденного операцией $w^{-1}l$, соответствует обобщенная резольвента R_λ . При помощи формулы обращения Стильтеса спектральная функция E_t восстанавливается по соответствующей ей обобщенной резольвенте: для любых $f(x)$ и $g(x)$ из $\mathcal{L}_w^2(a, b)$ при любых α и β имеет место равенство

$$(E_{\alpha, \beta} f, g) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\alpha^\beta ([R_{\sigma+i\varepsilon} - R_{\sigma-i\varepsilon}] f, g) d\sigma.$$

Пусть $\mathbf{y}(x, \sigma)$ — матрица-столбец, составленная из линейно независимых решений уравнения

$$l[y] = \lambda w y, \quad (2)$$

нормированных в точке $x_0 \in I$, т. е. $y_k^{[j-1]}(x_0, \lambda) = \delta_{k,j}$ ($k, j = 1, 2, \dots, n$), а

$$\eta(f; \sigma) = \int_a^b f(s) \mathbf{y}(s, \sigma) w(s) ds.$$

Теорема 3. Совокупность всех обобщенных спектральных функций E_t ($-\infty < t < +\infty$) минимального симметрического квазидифференциального оператора L определяется формулой

$$E_{\alpha, \beta} f = \int_\alpha^\beta \mathbf{y}^\tau(s, \sigma) d\mathbf{T}(\sigma) \eta(f; \sigma) \quad (f \in \mathcal{L}_w^2),$$

где $\mathbf{T}(\sigma)$ ($-\infty < \sigma < +\infty$) — матрица-функция распределения оператора L_0 , соответствующая его обобщенной резольвенте R_λ .

В случае неплотно заданного квазидифференциального оператора размерность матрицы $\mathbf{T}(\sigma)$ определяется не только порядком дифференциальной операции но и количеством интегральных краевых условий.

Будем считать, что оператор L_0 имеет равные индексы дефекта. Обозначим через A — его самосопряженное расширение в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_w^2(a, b)$. Пусть $\tilde{v}_k(x; \lambda)$ вектор-столбец вида $\tilde{v}_k(x; \lambda) = (v_k^{[0]}(x; \lambda), \dots, v_k^{[n-1]}(x; \lambda))$. Матрица $\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{J}$ при n четном и $\tilde{\mathbf{J}} = \pm i\mathbf{J}$ при n нечетном.

Теорема 4. Пусть при любом $\lambda \in [\alpha, \beta]$ уравнение (2) имеет $m = m' + m''$ линейно независимых решений

$$v_1(x; \lambda), v_2(x; \lambda), \dots, v_m(x; \lambda) \quad (3)$$

таких, что:

1) для каждого из m' первых решений (3):

a) $\int_a^c |v_k(x; \lambda)|^2 w(x) dx < \infty$ ($a < c < b$);

б) $\tilde{f}^*(x) \tilde{\mathbf{J}} \tilde{v}_k(x; \lambda) |_{x=a} = 0$, какова бы ни была функция $f(x) \in D(A)$;

2) для каждого из m'' последних решений (3):

a) $\int_c^b |v_k(x; \lambda)|^2 w(x) dx < \infty$ ($a < c < b$);

б) $\tilde{f}^*(x) \tilde{\mathbf{J}} \tilde{v}_k(x; \lambda) |_{x=b} = 0$, какова бы ни была функция $f(x) \in D(A)$.

3) каждая из функций $\tilde{v}_k(x; \lambda)$ при фиксированном x удовлетворяет условию Липшица относительно λ на сегменте $[\alpha, \beta]$.

Тогда кратность части спектра самосопряженного оператора A , заключенной в сегменте $[\alpha, \beta]$, не превосходит $n - m$.

Используя эту теорему, с помощью различных асимптотических методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений можно получить оценки кратности спектра самосопряженных расширений оператора L_0 в терминах коэффициентов квазидифференциальной операции l .

- [1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.
- [2] Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наук. думка, 1965.
- [3] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
- [4] Филиппенко В. И. Резольвенты линейного оператора, порожденного квазидифференциальным выражением // Исследования по комплексному анализу, теории операторов и матем. моделированию. — Владикавказ: Изд-во ВНИЦ РАН, 2004.
- [5] Штраус А. В. // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1954. — 18, N 1.