

Д.А. Филимонов (Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, mityafil@mccme.ru)

Уравнение Ши Сонглина, фактор-система и формальная нормальная форма

Вторая часть 16-ой проблемы Гильберта посвящена вопросу расположения и количества предельных циклов для полиномиальных векторных полей на плоскости. До сих пор нет никакой оценки для их количества даже для квадратичных векторных полей. Долгое время считалось, что это число не превосходит трех. В 1979 году Ван Мин-Шу и Чен Лан-Сун в своей работе [1] показали существование квадратичного векторного поля на плоскости, у которого имеется не менее четырех предельных циклов. В 1980 году Ши Сонглин [2] опубликовал конкретный пример векторного поля с не менее, чем четырьмя предельными циклами, задаваемого следующим уравнением

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x - y - 10x^2 + (5 + \delta)xy + y^2, \\ \dot{y} = x + x^2 + (-25 + 8\varepsilon - 9\delta)xy. \end{cases} \quad (1)$$

Требуемое возмущение в работе [2] указано явно: $\delta = -10^{-13}$, $\varepsilon = -10^{-52}$, $\lambda = -10^{-200}$. Ши Сонглин показал, что при указанном возмущении в уравнении (1) имеется не менее 4 предельных циклов: один вокруг точки $(0, 1)$ (этот цикл имеется и в невозмущенной системе), и три вокруг $(0, 0)$. Естественно возникает в связи с этим вопрос: “А сколько на самом деле предельных циклов в уравнении (1)”?

В настоящей работе предложен метод исследования, позволяющий локализовать предельные циклы для систем, содержащих сверхмедленный фокус. Этим методом исследована большая область на фазовой плоскости для уравнения Ши Сонглина. Предельные циклы в окрестности особой точки $(0, 0)$ локализованы в узких кольцах, где показана их единственность. В частности, будет доказана следующая

Теорема 1. *У системы (1) имеется ровно 4 предельных цикла, не пересекающих отрезок $[0.004, 0.04]$ оси Oy .*

Для оставшегося отрезка $[0.004, 0.04]$ был проведен численный эксперимент, показывающий отсутствие предельных циклов, пересекающих указанный отрезок.

-
- [1] Chen Lan-Sun, Wang Ming-Shu The relative position, and the number of limit cycles of a quadratic differential system.— *Acta Math. Sinica*, 1979
 - [2] Shi Songling A concrete example of the existense of four limit sycles for plane quadratic systems.— *Scietific Sinica*, 1980, v. 23, №2, p.153-158.
 - [3] Пыашенко, Ю., Yakovenko, S. Lectures on Analytic Theory of Ordinary Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, 86, Amer. Math. Soc., 2008.
-