З.Ю. Філер (Кіровоградський державний педагогічний університет ім. Володимира Винниченка, Україна)

Г.М. Дреєва (Кіровоградський національний технічний університет, Україна)

Комплексні розв'язки нерівностей та рівнянь

У кінці 90-х років З.Ю. Філер разом зі своїм дипломником С.П. Ткаченко за допомогою методу нев'язки встановили наявність комплексних розв'язків квадратичних нерівностей з дійсними коефіцієнтами. Саме у цей рік відмічалася 200 річниця доведення основної теореми алгебри К.Ф. Гаусом. Основні підходи та результати були висвітлені в доповіді [1]. Суть методу полягає в заміні нерівності $f(x) < 0$ рівнянням $f(x) + r = 0$, а $f(x) > 0$ - рівнянням $f(x) = r$. Тут уведена додатна нев'язка $r > 0$. Ситуація пояснюється розв'язанням нерівності $x^2 + 4x + 5 < 0$. Вона еквівалентна системі $x^2 + 4x + 5 + r = 0$, $r > 0$. Це дає множину комплексних розв'язків $X = -2 \pm i\sqrt{(1 + r)}, r > 0$.

"Шкільні"нерівності є частинними випадками рівняння $f(x) = re^{i\phi}, r > 0, 0 \leq \phi < 2\pi$. При $\phi = 0$ отримуємо нерівність $f(x) > 0$, при $\phi = \pi$ - нерівність $f(x) < 0$. Фактично розв'язання таких нерівностей є пошук прообразу по заданому образу - правої чи лівої дійсної піввісі. Узагальнююче рівняння дає прообраз променя із заданим ϕ.

Із основної теореми алгебри про існування комплексного кореня многочлена $P_n(x)$ степеня $n \geq 1$ випливає теорема про існування розв'язків нерівностей для многочленів. Доведення її за допомогою леми Д'Аламбера використовує розв'язок нерівності $c \cdot h^k < 0$, $k \geq 1$ з комплексними і h. Залишалося Гаусу зробити ще один крок до отримання методу розв'язання нерівностей. Але за 200 років звикли шукати лише дійсні розв'язки нерівностей.

Алгебра многочленів використовує лему про модуль старшого члену, яка гарантує досягнення найменшого значення у замкненій множині. Для аналітичної функції, представленої рядом, це не вдається, бо вона може не приймати одного із значень на комплексній множині, як, наприклад, функція $e^x \neq 0$. Всі інші значення e^x приймати може, тому й існують множини розв'язків нерівності $e^x < 0$.

Метод нев'язки зводить нерівності до рівнянь, тому автори розробляють методи пошуку комплексних коренів. Якщо функція $f(x)$ має точку екстремуму x_0, в якій знак функції співпадає із знаком другої похідної, яка близька до дійсної частини коренів, то квадратичний многочлен Тейлора дасть наближення до уявної частини. Усі комплексні корені можна знайти з наближення в околі цієї точки за узагальненою формулою Тейлора $W = f(x_0) \cdot ch((x - x_0))$.

[1] Філер З.Ю. Рівняння та нерівності в науці та навчанні // Матем., її застосув. та виклад. Матеріали конф. - Кіровоград: КДПУ, 1999. - С.141-145.