Д.В. Дордовский (Институт Прикладной Математики и Механики НАН Украины)

Ультраметричность касательных пространств к метрическим пространствам

Касательное и предкасательное пространства к общему метрическому пространству были введены в [1], см. также [2], в связи обобщением понятия производной на метрических пространствах. Если (X, d) — метрическое пространство, $p \in X$, то предкасательное пространство к пространству X в точке p обозначим через Ω_p^X. Приведем критерий ультраметричности предкасательных пространств.

Определим функцию $\Phi : X \times X \times X \to \mathbb{R}$ правилом

$$\Phi(x,y,z) := \frac{d(x,y)(d(x,p) \wedge d(y,p))}{(d(x,p) \vee d(y,p))^2} \vee \frac{d(x,z)(d(x,p) \wedge d(z,p))}{(d(x,p) \vee d(z,p))^2} \vee \frac{d(z,y)(d(z,p) \wedge d(y,p))}{(d(z,p) \vee d(y,p))^2},$$

если $(d(x,y) \vee d(y,z)) \wedge (d(x,y) \vee d(x,z)) \wedge (d(x,z) \vee d(y,z)) \neq 0$ и $\Phi(x,y,z) := 0$ в противном случае. Пусть также

$$\Psi(x,y,z) := \frac{d(x,y) \vee d(y,z) \vee d(x,z)}{d(x,y) \wedge d(y,z) \wedge d(z,x)}$$

для всех $x, y, z \in X$, где $\Psi(x,y,z) := \infty$ при $d(x,y) \wedge d(y,z) \wedge d(z,x) = 0$.

Через $s(x,y,z)$ обозначим решение уравнения $d^s(x,y) = d^s(x,z) + d^s(y,z)$, принадлежащее интервалу $[1, \infty)$, если такого решения не существует, то $s(x,y,z) := \infty$. Верна следующая теорема.

Теорема. [3]. Пусть (X, d) — метрическое пространство с фиксированной точкой p. Все предкасательные пространства Ω_p^X ультраметричны тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x,y,z \to p} \frac{s(x,y,z)}{\Phi(x,y,z)} \Psi(x,y,z) = \infty$, где $\frac{1}{\Phi(x,y,z)} := \infty$ при $\Phi(x,y,z) = 0$.

Так как $s(x,y,z) \equiv \infty$ в любом ультраметрическом пространстве, то приведенная теорема показывает, что любое предкасательное пространство к ультраметрическому пространству само является ультраметрическим.

[1] O. Dovgoshey, O. Martio, Tangent spaces to metric spaces, Reports in Math., Helsinki Univ., **480**, 2008, 20p.

[2] O. Dovgoshey, Tangent spaces to metric spaces and to their subspaces, Ukrain. Math. Bull. **5** (4), 2008, 468–485.

[3] O. Dovgoshey, D. Dordovskyi, Ultrametricity and metric betweenness in tangent spaces to metric spaces, to appear. (arXiv:0904.4356 [math.MG] 28 Apr 2009).