В.Ф. Бабенко, М.С. Чурилова (Днепропетровский национальный университет, Институт прикладной математики и механики, Днепропетровск, Украина)

О неравенствах типа Ландау-Колмогорова для дробных производных функций, заданных на оси и полуоси

Для функций, заданных на $G = \mathbb{R}$ или $G = \mathbb{R}_+$ производная Маршо порядка $\alpha \in (0,1)$ определяется равенством [2]

$$\left(D_{\pm}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\alpha\Gamma\left(1-\alpha\right)} \int\limits_0^{\infty} \frac{f\left(x\right) - f\left(x \mp t\right)}{t^{1+\alpha}} dt$$

(для $G = \mathbb{R}_+$ - только производная $D_{-}^{\alpha} f$). Пусть E - идеальная решетка функций, заданных на G [1], E^1 - ассоциированное пространство. Нами доказана

Теорема. Пусть $\alpha \in (0,1)$ таково, что $(\cdot)^{-\alpha} \chi_{(0,1]}(\cdot) \in E^1$. Тогда для любой ограниченной на G и локально абсолютно непрерывной функции $f : G \to \mathbb{R}$ такой, что $f' \in E$, при любом $h > 0$ имеет место точное неравенство

$$\left\|D_{\pm}^{\alpha} f\right\|_{\infty} \leq \frac{2\left\|f\right\|_{\infty}}{\Gamma(1-\alpha)h^{\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\|f'\right\|_{E} \left\|\left(\frac{1}{(\cdot)^{\alpha}} - \frac{1}{h^{\alpha}}\right) \chi_{(0,h]}(\cdot)\right\|_{E^1}$$

(для $G = \mathbb{R}_+$ - только с производной $D_{-}^{\alpha} f$).

Дан ряд приложений этой теоремы. В частности, решена задача Стечкина о приближении неограниченного оператора дробного диференцирования ограниченными на классе ограниченных функций с первой производной из L_s. Найдены точные условия вложения класса функций f: $f' \in E$ в класс функций с ограниченной дробной производной.

[1] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. — М., 1978.

[2] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. — Минск, 1987.