С.М. Чуйко (Славянский государственный педагогический университет, Украина)

Метод наименьших квадратов в теории нелинейных краевых задач

Построена сходящаяся при $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ итерационная процедура для нахождения решения $z(t, \varepsilon) \in C^1[a, b], C[0, \varepsilon_0]$ краевой задачи [1]

$$dz/dt = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in R^n, \tag{1}$$

при $\varepsilon = 0$ обращающегося в решение $z_0(t, c_r)$ порождающей задачи

$$dz_0/dt = A(t)z_0 + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \ell z(\cdot) : C[a, b] \to R^n. \tag{2}$$

Теорема [1]. *Пусть краевая задача (1) представляет критический* ($P_{Q^*} \neq 0$) *случай и выполнено условие разрешимости [1] порождающей задачи (2). Тогда для каждого корня* $c_r^* \in R^r$ *уравнения* $F(c_r) = P_{Q_r^*} \ell K \Big[Z(z_0(s, c_r), s, 0) \Big](\cdot) = 0$ *при условии* $\det[F'_{c_r}(c_r^*)] \neq 0$ $(r = n - \mathrm{rank}\ Q)$ *задача (1) имеет единственное решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в решение* $z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G\Big[f(s); \alpha\Big](t)$ *порождающей задачи (2).*

Для вычисления приближенного решения краевой задачи (1) в виде частичных сумм обобщенного ряда Фурье, следуя Н.М. Крылову, использован метод наименьших квадратов [2]; при условии невырожденности матрицы Грама $\Gamma(\varepsilon)$ системы функций $\Phi_i(t, \varepsilon) = \Big[A(t) + \varepsilon A_1(t)\Big]\varphi_i(t) - \varphi'_i(t)$ эти решения определяет сходящаяся итерационная процедура, представляющая модифицированный метод простых итераций [3]. Найдена оценка ε_* длины промежутка $[0; \varepsilon^*]$ значений малого параметра, на котором сохраняется сходимость полученной итерационной процедуры.

Здесь $A(t), f(t) \in C[a, b]$; $Z(z, t, \varepsilon) \in C^1\Big[||z - z_0|| \leq q\Big], C[a, b], [0, \varepsilon^*]$; $A_1(t) = Z'_z(z_0, t, 0)$; $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ... , $\varphi_k(t)-$ система линейно-независимых вектор-функций, удовлетворяющих условию $\ell\varphi_i(\cdot) = 0$; $P_{Q^*} : R^n \to N(Q^*)-$ ортопроектор, $Q = \ell X(\cdot)$, $X(t)-$ нормальная фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (2), $K[f(s)](t)-$ оператор Грина задачи Коши для дифференциальной системы (2), $G\Big[f(s), \alpha\Big](t)-$ обобщенный оператор Грина [1] краевой задачи (2), $P_{Q_r^*}-$ $(r \times n)-$ матрица, составленная из $r-$ линейно-независимых строк $(n \times n)-$ ортопроектора $P_{Q^*} : R^n \to N(Q^*)$, $\ell z(\cdot) : C[a, b] \to R^n-$ линейный векторный функционал.

[1] *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.— Utrecht; Boston: VSP, 2004.— XIV + 317 pp.

[2] *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации.— М. Наука. 1965.— 408 с.

[3] *Чуйко С.М.* О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов // Нелінійні коливання. — 2008. **11**. № 4, С. 554 — 573.