Р.И. Черныш (УкрНИГМИ, Киев, Украина)

О согласовании геометрического и операторного расщеплений задачи

Одним из наиболее перспективных подходов к численному решению трудоёмких задач математической физики является деление вычислительной области на части, т.е. её геометрическое расщепление. С одной стороны, это позволяет успешно использовать многопроцессорные ЭВМ и сократить время решения задачи. Но, с другой стороны, возникает необходимость согласования решений, полученных в смежных подобластях. С этой целью применяют различные приёмы, например, задают обменные граничные условия, используют наложение подобластей или итерирование и др. [1, 2]. По сути, все эти подходы к согласованию решений подзадач основаны на действиях с самими решениями. Однако существует возможность такого согласования благодаря удачному совмещению геометрического и операторного расщеплений задачи.

Рассмотрим в качестве операторного расщепления аддитивно-усреденённое [3] или его модификацию [4] для начально-краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^{p} A_k u = f, \qquad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,t) = u_\Gamma(t), \qquad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

где A_k, $k = 1,...,p$ – пространственный дифференциальный оператор по независимой переменной x_k, $\dim\Omega = p$.

Пусть каждый оператор A_k уравнения (1) связан лишь с одним геометрическим направлением, т.е. содержит производные только по x_k и не содержит каких-либо других производных. Например, $A_k u = \nu_k\, \partial u/\partial x_k - \mu_k\, \partial^2 u/\partial x_k^2$.

Для геометрического расщепления задачи используем декомпозицию расчетной области, состоящую из нескольких специальных покоординатных разбиений. Такое разбиение характеризуется тем, что все его подобласти остаются целыми хотя бы вдоль направления одной координатной оси, т.е. для расчета подзадачи по этому направлению используются только краевые условия исходной задачи (1) - (3). Множество направлений разбиений покрывают все просторанственные направления области Ω.

Предлагается согласовывать декомпозицию области для одномерных подзадач, которые получаются в результате операторного расщепления, с оператором самой подзадачи: оператору A_k ставим в соответсвие разбиение области вдоль направления оси Ox_k. Таким образом, получаем совокупность подзадач каждого направления для неперекрывающихся подобластей, решения которых уже не нуждаются в согласовании.

[1] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Аддитивные схемы для задач математической физики. – М.: Наука, 2001.
[2] Boglaev I. // Applied Mathematics and Computation. – 2005. – V. 165 – pp. 647 – 668.
[3] Гордезиани Д.Г., Меладзе Г.В. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1974 – №1 – с. 246- 250.
[4] Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.И. // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – №1. – с. 100 – 107.