

О.Б.Чернобай (Національний університет ДПС України, Ірпінь)

Про узагальнені розв'язки диференціальних рівнянь з кількома операторними коефіцієнтами

Розглядаються узагальнені розв'язки операторного рівняння $\mathcal{L}^+(u) = 0$ коли гільбертовий простір, який містить значення вектор-функцій є фіксованим. Результати цієї роботи узагальнюють результати отримані в [1].

Нехай H - повний, сепарабельний комплексний гільбертовий простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$. $L(H)$ — сукупність всіх обмежених операторів в H . Позначимо $I = (-l, l)$, $l \leq \infty$. $\tilde{I}$ — його замикання.

Розглянемо $L^2(H, I) = L^2(I) \otimes H$, де $L^2(I)$ — простір L^2 , побудований по мірі Лебега dx на інтервалі I . Для довільного $k = 0, 1, \dots$ візьмемо відоме гільбертове оснащення простору $L^2(I)$ соболевськими просторами $W_{2,0}^{-k}(I) \supset L^2(I) \supset W_{2,0}^k(I)$, де $W_{2,0}^k(I)$ — підпростір соболевського простору $W_2^k(I)$, що складається з вектор-функцій $u \in W_2^k(I)$, для яких $u(0) = 0$. Побудуємо тензорні добутки таких просторів $W_{2,0}^{-k}(I) \otimes H = W_{2,0}^{-k}(H, I)$, $W_{2,0}^k(I) \otimes H = W_{2,0}^k(H, I)$. Отримаємо гільбертове оснащення простору $L^2(H, I)$

$$W_{2,0}^{-k}(H, I) \supset L^2(H, I) \supset W_{2,0}^k(H, I).$$

У просторі H розглянемо довільні обмежені оператори $A_0, A_1, \dots, A_m : H \mapsto H$, тоді існують спряжені до них відповідно $A_0^*, A_1^*, \dots, A_m^* : H \mapsto H$. Припустимо, що існує A_m^{-1} .

Побудуємо диференціальний вираз $(\mathcal{L}u)(t) = \left(\sum_{k=0}^m A_k \frac{d^k}{dt^k}\right) u$, $u \in W_{2,0}^k(H, I)$. Формально спряжений диференціальний вираз відносно простору $L^2(H, I)$ буде:

$$(\mathcal{L}^+u)(t) = \sum_{k=0}^m A_k^* (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} u(t), \quad u \in W_{2,0}^k(H, I). \quad (1)$$

Множину всіх неперервних векторнозначних функцій $\tilde{I} \ni t \mapsto f(t) \in H$ позначимо через $C(H, \tilde{I})$, а множину фінітних на I , k — раз неперервно диференційовних функцій з $C(H, \tilde{I})$ — через $C_0^k(H, I)$, $k = 0, 1, \dots, \infty$.

Векторнозначну функцію $\varphi(t) \in W_{2,0}^{-l}(H, I)$, де $l = 1, 2, \dots$, назовемо узагальненим розв'язком рівняння $\mathcal{L}^+u = 0$ всередині інтервала I , якщо

$$(\varphi, \mathcal{L}v)_{L^2(H, I)} = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(H, I). \quad (2)$$

Теорема 1 *Будь-який узагальнений розв'язок $\varphi(t) \in W_{2,0}^{-l}(H, I)$, $l = 1, 2, \dots$ рівняння $\mathcal{L}^+u = 0$, в дійсності входить в $W_2^p(H, I)$ для будь-якого $p = 1, 2, \dots$*

[1] Чернобай О.Б. Про узагальнені розв'язки диференціальних рівнянь з операторними коефіцієнтами// У М Ж.-2006.-58. №5.-С.715-720.