О.А. Бурилко (Інститут математики НАН України, Київ, Україна)

Біфуркації в узагальненій моделі Курамото–Сакагучі зв'язаних фазових осциляторів

Системи глобально зв'язаних осциляторів є популярними моделями в фізиці, біології, медицині і навіть при вивченні соціальних явищ. Основним ефектом, що досліджується в даних моделях, є колективна синхронізація, коли велика кількість елементів системи узгоджують свої ритми і продукують ненульове середнє поле, що має ту ж частоту, що і більшість осциляторів. Однією з найбільш важливих для прикладних досліджень є запропонована в 1984 році модель Й. Курамото [1]. На це вказуює велика кількість робіт, присвячених саме цій моделі, а також її узагальненням, узгодженим з різноманітними природничими потребами (див. напр. [2, 3, 4, 5]).

Розглянемо модель Курамото N зв'язаних осциляторів:

$$\dot{\theta}_k = \omega_k + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N} g(\theta_k - \theta_j), \quad k = \overline{1, N},$$

де $\theta_k \in [0, 2\pi)$ — фазові змінні, ω_k — власні частоти, $K > 0$ — параметр зв'язку, а $g(x)$ — деяка достатньо гладка функція зв'язку. Найкраще така система доліджена (починаючи з робіт автора моделі) у випадку, коли функція зв'язку є синусоїдальною. Одним з важливих узагальнень є модель Курамото–Сакагучі [2, 3], коли функція $g(x) = -\sin(x - a)$ має параметр фазового зсуву $\alpha \in [0,\ 2\pi]$. Наша мета описати біфуркації переходів від десинхронізованого до синхронізованих режимів (різних типів) і до подальшої повної синхронізації в запропонованому А. Піковським та М. Розенблюмом узагальненні попередньої моделі, а саме, коли функція зв'язку $g(x) = \sin(x + \alpha(r, \beta))$ має функцію фазового зсуву $\alpha(r, \beta)$, яка залежить від деякого вектору параметрів $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, $m \geq 1$, а також від так званого параметру порядку r, що є амплітудою комплексного середнього поля $re^{i\psi} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j}$. Ми розглядаемо випадок рівних власних частот. Встановлено, що система має основні три режими синхронізації, переходи між якими відбуваються здебільшого через сідло–вузлові біфуркації гетероклінічних циклів та біфуркації Андронова-Хопфа. Також показано мультистабільність різних стійких режимів в моделі.

[1] Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. — Berlin, Springer-Verlag, 1984.

[2] Sakaguchi H., Kuramoto Y. // Progress of Theoretical Physics. — 1986. — **76**, pp. 576–581.

[3] Watanube S., Strogatz S.H. // Physica D. — 1994. — **74**, pp. 197–253.

[4] Rosenblum M., Pikovsky A. // Phys Rev. Lett. — 2007. — **98**, p. 064101.

[5] Ashwin P., Burylko O., Maistrenko Yu. // Physica D. — 2008. — **237**, pp. 454–466.