

Г. А. Бессонов (Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина)

Системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и задача стабилизации

Рассмотрим управляемую систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени t :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \neq \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = C_i x, \quad x \in R^n, \quad u \in R^r, \quad t \in R^1, \quad (2)$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$; $\Delta x|_{t=\tau_i} = x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0)$; u - управление; $A(t)$ и $B(t)$ матрицы - функции размеров $n \times n$ и $n \times r$, соответственно, непрерывные при $t \geq t_0$; C_i постоянные матрицы для каждого i размеров $n \times n$. Моменты импульсного воздействия $\{\tau_i\}$ удовлетворяют условиям $t_0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots$ и $\tau_{i+1} - \tau_i \geq \theta > 0$, где θ некоторая константа. Задача стабилизации системы (1), (2) состоит в следующем: необходимо найти управление $u(t, x) = P(t)x$ таким образом, что любое решение системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)P(t))x, \quad t \neq \tau_i, \quad (3)$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = C_i x, \quad (4)$$

стремится к нулю когда $t \rightarrow +\infty$, или другими словами, что система (3), (4) является асимптотически устойчивой [1]. Будем предполагать, по аналогии с [2], что матрицы $A(t)$ и $B(t)$ могут быть неограничены и что для любого $t \geq t_0$ существует функция

$$g(t) = \int_{t_0}^t h(s)ds, \quad \text{где } h(t) \text{ положительно определенная, монотонно неубывающая}$$

функция и $\|A(t)\| \leq h(t), \forall t \geq t_0$.

Рассмотрим матрицу [3]

$$N_\lambda(t) = \int_t^\infty e^{-\lambda(g(s)-g(t))} X(t,s)B(s)B^*(s)X^*(t,s)ds$$

где $t \geq t_0, \lambda \geq \lambda_0$, здесь символ $*$ означает транспонирование и $X(t,s)$ матрица Коши системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \neq \tau_i,$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = C_i x$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема.

Предположим, что имеют место следующие пять условий:

1^а. Матрицы $A(t)$ и $B(t)$ непрерывно дифференцируемы для любого $t \geq t_0$ $(n-2)$ и $(n-1)$ раз, соответственно.

2^а. Для любых $t \geq t_0$, $rg(B(t), LB(t), \dots, L^{n-1}B(t)) = n$, где $L = A(t) - E_n \frac{d}{dt}$.

3^а. Для любых $t \geq t_0$ существует функция $g(t) = \int_{t_0}^t h(s)ds$, где $h(t)$ - функция,

положительно определенная, монотонно неубывающая и $\|A(t)\| \leq h(t)$ для любых $t \geq t_0$.

4^a. Существует $\lambda_0 > 0$ такая, что для всех $\lambda \geq \lambda_0$ и для любого $t \geq t_0$ ($t_0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots$)

$$\int_t^\infty e^{-(\lambda-2)(g(s)-g(t))} \|B(s)\|^2 ds \cdot \prod_{t_0 \leq \tau_i} \|(E_n + C_i)^{-1}\|^2 \leq \dot{I} \quad ,$$

где $\dot{I}$ - некоторая положительная константа.

5^a. Для каждого $i = 1, 2, \dots$ матрицы

$$N_\lambda^{-1}(\tau_i + 0) + C_i^* N_\lambda^{-1}(\tau_i + 0_i) + N_\lambda^{-1}(\tau_i + 0_i) C_i + C_i^* N_\lambda^{-1}(\tau_i + 0) C_i - N_\lambda^{-1}(\tau_i)$$

неположительно определены.

Тогда управление

$$u(t, x) = -B^*(t) N_\lambda^{-1}(t) x \equiv P(t) x$$

стабилизирует систему (1), (2) для любых $\lambda \geq \lambda_0$.

[1] Самойленко А.М., Перестюк Н.А.. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К.: Изд-во «Вища школа», 1987.

[2] Бессонов Г.А. // Вест. Харьковского ун-та. Сер. Мат. Мех. - 1986. - N 286.

[3] Коробов В.И. Метод функции управляемости. — М.- Ижевск.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007.
