

О. А. Андропова (Таврический Национальный Университет им. В. И. Вернадского), Симферополь, Украина.

Начально-краевые и спектральные задачи с поверхностной диссипацией энергии

Проблему исследования класса начально-краевых задач с поверхностной диссипацией энергии поставил проф. Харьковского национального университета Чуешов И.Д. в сентябре 2004 года на 15-ом Крымском математическом симпозиуме КРОМШ.

В произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$ рассматривается начально-краевая задача для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(t, x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

при краевом условии

$$\frac{\partial u}{\partial n} + u + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad \alpha > 0, \quad (2)$$

а также начальных условиях

$$u(0, x) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u^1(x), \quad x \in \Gamma. \quad (3)$$

Здесь приведена линеаризованная начально-краевая задача с поверхностной диссипацией энергии. Особенностью этой задачи является наличие параметра α , входящего в граничное условие при первой производной по времени и характеризующего изменение поверхностной диссипации энергии.

В сообщении рассмотрена задача (1) — (3), а также абстрактная начально-краевая задача, обобщающая ее на основе использования абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и оператора следа (см. [1]). Путем введения абстрактных вспомогательных краевых задач и их операторов осуществляется переход от (1) — (3) к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка, а от нее — к задаче Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка с операторным коэффициентом, являющимся генератором сжимающей полугруппы операторов. Это позволяет, с использованием теории полугрупп, доказать теорему о существовании сильного решения абстрактной начально-краевой задачи, а соответственно и исходной задачи математической физики (1) — (3).

Изучены спектральные проблемы, порожденные начально-краевыми задачами с поверхностной диссипацией энергии. Рассмотрены простейшие свойства спектра, а затем на примерах — одномерном, двумерном и в цилиндрических областях — обнаружено, что спектр рассматриваемых задач достаточно своеобразен. Выясняется,

как этот спектр мигрирует в комплексной плоскости при изменении параметра диссипации от нуля до бесконечности. Приводятся примеры численных расчетов спектра на основе метода итераций. Далее, в общей постановке исследована спектральная задача. На основе одного общего результата, полученного Т. Я. Азизовым, доказано, что в случае общего положения спектр задачи является дискретным с предельной точкой на бесконечности (см. [2]).

Приводятся примеры, которые являются частными случаями абстрактной начально-краевой и спектральной задач. Это, в частности, задачи с равномерно эллиптическим формально самосопряженным дифференциальным выражением, а также соответствующие системы уравнений, уравнения линейной теории упругости (уравнения Ламе). Кроме того, приводятся примеры задач сопряжения с поверхностной диссипацией энергии для случая, когда имеются две или более контактирующих сред, а диссипация происходит на границах контакта этих сред.

- [1] Копачевский Н.Д. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложения к задаче Стокса // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — Симферополь, 2004. — №2 — С. 52–80.
 - [2] Андронова О.А., Копачевский Н.Д. О линейных задачах с поверхностной диссипацией энергии // Современная математика. Фундаментальные направления. — Москва: Рос. инст. дружбы народов, 2008. — Том 29. — С. 11–28.
-