Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 45–50

УДК 517.958:512.816

Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь високого порядку

В.М. БОЙКО [†]***, В.О. ПОПОВИЧ***

Інститут математики НАН України, Київ

† *E-mail: boyko@imath.kiev.ua*

Проведено групову класифікацію в класі еволюційних рівнянь вигляду $u_t + uu_1 = F(u_n)$, що інваріантні відносно перетворень Галілея і узагальнюють рівняння Бюргерса і Кортевега-де Фріза.

Group classification in the class of evolutionary equations of the form $u_t + uu_1 = F(u_n)$ is carried out. These equations are invariant under Galilei transformations and generalize the Burgers and Korteweg-de Vries equations.

1. Вступ. Розглянемо клас еволюційних рівнянь вигляду

$$u_t + uu_1 = F(u_2, u_3, \dots, u_n), \tag{1}$$

де $u = u(t, x)$, $u_t = \partial u/\partial t$, $u_k = \partial^k u/\partial x^k$, $k = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, F — довільна гладка функція змінних u_2, u_3, …, u_n. Важливість цього класу рівнянь і необхідність його дослідження обумовлена кількома причинами. Перш за все, він містить як частинні випадки низку відомих рівнянь математичної фізики:

$F = 0$ — рівняння простої хвилі;
$F = \mu u_2$ — рівняння Бюргерса;
$F = \nu u_3$ — рівняння Кортевега-де Фріза;
$F = \mu u_2 + \nu u_3$ — рівняння Кортевега-де Фріза–Бюргерса;
$F = \mu u_2 + \gamma u_4$ — рівняння Курамото–Сивашинського.

Крім того, частинна похідна по часу входить в рівняння (1) у складі “матеріальної похідної” $\partial/\partial t + u\partial/\partial t$, яка співпадає з повною похідною по часу d/dt у випадку, коли u інтерпретують як швидкість переміщення частинок певного середовища (в ейлерових координатах). Наявність такого агрегату (разом із структурою функції F) гарантує виконання для всіх рівнянь з класу (1) принципу відносності Галілея, тобто інваріантність відносно групи Галілея $G(1,1)$, що породжується перетвореннями зсуву за часом t і просторовою змінною x ($t' = t+a$, $x' = x+b$, $u' = u$) та перетвореннями Галілея ($t' = t$, $x' = x + vt$, $u' = u + v$).

В цій роботі виконано групову класифікацію в вужчому, ніж (1), класі рівнянь вигляду

$$u_t + uu_1 = F(u_n), \quad F_{u_n} \neq 0, \tag{2}$$

тобто розглянуто випадок, коли функція F залежить лише від старшої похідної u_n. Вперше класифікацію таких рівнянь для $n \in \{2; 3; 4\}$ проведено в [1, 2], де для них також побудовано класи точних розв'язків та отримано узагальнення, що мають широку симетрію. На відміну від [1, 2], значення n тут не фіксується, що суттєво ускладнює доведення класифікаційного результату.

2. Результат класифікації. Введемо позначення:

$$\begin{aligned}
&P_0 = \partial_t, \quad P_1 = \partial_x, \quad G = t\partial_x + \partial_u,\\
&D^k = (nk - k + 1)t\partial_t + (2 - k)x\partial_x + (1 - nk)u\partial_u,\\
&D = (n+1)D^{3/(n+1)} = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u,\\
&\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u,\\
&D' = 2D - (2n-1)(t^2\partial_x + 2t\partial_u), \quad \widehat{D} = 4t\partial_t + 5x\partial_x + u\partial_u,\\
&R_1 = u\partial_x, \quad R_2 = (2tu - x)\partial_x + u\partial_u, \quad R_3 = (tu - x)(t\partial_x + \partial_u).
\end{aligned}$$

Результат групової класифікації щодо рівнянь вигляду (2) сформульовано у вигляді трьох наступних теорем.

Теорема 1. *Ядро основних груп рівнянь вигляду (2) співпадає з групою Галілея $G(1,1)$, алгебра Лі якої $A^{\mathrm{ker}} = AG(1,1) = \langle P_0,\ P_1,\ G\rangle$.*

Теорема 2. *Група еквівалентності G^{equiv} класу рівнянь (2) породжується операторами P_0, P_1, G, $t\partial_t + x\partial_x - F\partial_F$, $x\partial_x + u\partial_u + F\partial_F$, $t^2\partial_x + 2t\partial_u + 2\partial_F$. Дія будь-якого перетворення еквівалентності на функцію F має вигляд*

$$\widetilde{F}(u_n) = \delta_1 F(\delta_2 u_n) + \delta_0, \quad \text{де} \quad \delta_0, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R},\ \delta_1\delta_2 \neq 0. \tag{3}$$

Зауваження. При виведенні формули (3) (щоб зняти вимогу додатності для констант δ_1 і δ_2) використовувались також два дискретних перетворення еквівалентності рівнянь (2):

$$\tilde{t} = -t,\ \tilde{x} = -x,\ \tilde{u} = u,\ \widetilde{F} = -F \quad \text{та}$$
$$\tilde{t} = t,\ \tilde{x} = -x,\ \tilde{u} = -u,\ \widetilde{F} = -F.$$

Теорема 3. *З точністю до перетворень з G^{equiv} для рівнянь (2) існує лише чотири при $n = 2$ і три при $n > 2$ випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності $A^{\max} = A^{\max}(F)$ (нижче наведено лише базисні оператори з доповнення до $AG(1,1)$):*

1. $F = (u_n)^k,\ k \neq 0, \frac{3}{n+1}$: $\quad D^k$;

2. $F = \ln u_n$: $\quad D'$;

3. $F = (u_n)^{\frac{3}{n+1}}$: $\quad D,\ \Pi$;

4. $F = (u_2)^{\frac{1}{3}}\ (n = 2)$: $\quad \widehat{D},\ R_1,\ R_2,\ R_3$.

В доведенні класифікаційного результату використовується така лема.

Лема 1. *Для довільного еволюційного рівняння*

$$u_t = H(t, x, u, u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad \text{де} \quad n \geqslant 2, \quad H_{u_n} \neq 0,$$

коефіцієнт ξ^t при ∂_t в будь-якому інфінезімальному операторі, що породжує однопараметричну групу локальних перетворень симетрії цього рівняння, не залежить від x і u.

Доведення. Перейдемо у відповідному інфінітезімальному критерії інваріантності [4, 5] на многовид, заданий рівнянням в продовженому просторі. Збираючи коефіцієнти при похідній $u_{n-1,t}$ в одержаній рівності, маємо, що $nH_{u_n}(\xi^t_x + \xi^t_u u_x) = 0$, тобто $\xi^t_x = \xi^t_u = 0$.

3. Доведення результату класифікації. Випадок $n = 2$ (доведення для якого має певні особливості порівняно з загальним випадком) повністю розглянуто в [1, 2]. Тому надалі вважамо, що $n > 2$.

Скористаємося для класифікації технікою, запропонованою в [3]. Так як рівняння (2) еволюційне, то в силу леми 1 для будь-якої однопараметричної групи локальних перетворень його симетрії відповідний інфінітезімальний оператор має вигляд

$$Q = \xi^t(t)\partial_t + \xi^x(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u.$$

Інфінітезімальной критерій інваріантності [4, 5] для рівняння (2) і оператора Q після переходу на многовид, заданий рівнянням (2) в продовженому просторі, набуває вигляду

$$\eta_t+u\eta_x+(\eta-\xi^x_t)u_1+(\xi^t_t-\xi^x_x)uu_1+(\eta_u-\xi^t_t-\xi^x_u u_1)F=\eta^n F', \qquad (4)$$

де η^n — коефіцієнт при ∂_{u_n} в n-му продовженні оператора Q [4, 5]:

$$\eta^n = u_n\{\eta_u - n\xi^x_x - (n+1)\xi^x_u u_1\} + u_{n-1}\{n\eta_{xu} + n\eta_{uu}u_1 -$$
$$-\tfrac{1}{2}n(n-1)\xi^x_{xx} n^2\xi^x_{xu}u_1 - \tfrac{1}{2}n(n+1)\xi^x_{uu}u_1^2 - \tfrac{1}{2}n(n+1)\xi^x_u u_2\} + \cdots$$

(тут наведено лише члени, що містять старші похідні u_n та u_{n-1}).

Якщо F — довільна функція, то розщеплюючи спочатку по F і F', а потім по u_1, u_2, ..., u_n, отримаємо, зокрема, такі визначальні рівняння: $\xi^x_u=0$, $\eta_u=\xi^t_t=n\xi^x_x$, $\eta=(\xi^x_x-\xi^t_t)u+\xi^x_t$, $\eta_t+u\eta_x=0$, звідки $\xi^x_u=\xi^x_x=\xi^t_t=0$, $\eta=\xi^x_t$, $\xi^x_{tt}=0$. При виконанні останнього набору умов рівняння (4) перетворюється в тотожність, що завершає доведення теореми 1.

Максимальна група еквівалентності рівнянь (2) (тобто множина локальних перетворень в просторі “незалежних змінних” t, x, u, u_1, u_2, ..., u_n та “залежної змінної” F, що не виводять з класу рівнянь (2), причому перетворення по t, x і u не залежать від F [4]) співпадає з групою, породженою сукупністю однопараметричних груп локальних симетрій системи

$$u_t+uu_x=F, \quad F_t=F_x=0, \quad F_{u_k}=0,\ k=\overline{1,n-1}, \qquad (5)$$

інфінітезімальні оператори яких мають вигляд

$$\widehat{Q}=\hat\xi^t(t,x,u)\partial_t+\hat\xi^x(t,x,u)\partial_x+\hat\eta(t,x,u)\partial_u+\hat\eta^k(t,x,u)\partial_{u_k}+$$
$$+\hat\chi(t,x,u,u_1,u_2,\dots,u_n,F)\partial_F,$$

де $\hat\eta^k=D^k_x(\hat\eta-\hat\xi^t u_t-\hat\xi^x u_x)+\hat\xi^t u_{k,t}+\hat\xi^x u_{k+1}$, $D_x=\partial_x+u_1\partial_u+\sum_{k=1}^{\infty}u_{k+1}\partial_{u_k}$ — оператор повної похідної за змінною x. З інфінітезімального критерію інваріантності для системи (5) після розщеплення за незв’язаними змінними отримаємо визначальні рівняння на коефіцієнти оператора $\widehat{Q}$, з яких випливає твердження теореми 2.

Опишемо тепер всі можливі розширення $A^{\max}$ в класі рівнянь (2). Якщо $\dim A^{\max}>\dim A^{\ker}$, то (4) є нетотожнім відносно F рівнянням загального вигляду

$$(au_n+b)F'=cF+d, \quad \text{де} \quad a,\ b,\ c,\ d \text{ — деякі сталі.} \qquad (6)$$

Таких рівнянь може одне або два. Функція F задовольняє два рівняння вигляду (6) тоді і тільки тоді, коли вона лінійна.

Розглянемо перший випадок — (нелінійна) функція F задовольняє точно одне рівняння вигляду (6). Тоді $(a,b)\neq(0,0)$, $(c,d)\neq(0,0)$. Виразимо F' з (6) і підставимо в (4). В отриманій таким чином умові F виступає як ще одна незв'язана змінна. Зберемо послідовно коефіцієнти при $u_{n-1}u_2$, $u_{n-1}u_1$, uu_1, u^2, u_1, u, u_nF, u_n, F в цій умові і прирівняємо до нуля, враховуючи на кожному кроці вже знайдені визначальні рівняння. В результаті розщепимо (4) до такої системи визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора Q:

$$\begin{aligned}
&\xi^x_u=0,\quad \eta_{uu}=0\quad (\text{тоді } \eta=\eta^1(t,x)u+\eta^0(t,x)),\\
&\eta^1=\xi^x_x-\xi^t_t,\quad \eta^1_x=0\quad (\text{тоді } \xi^x_{xx}=0),\quad \eta^0=\xi^x_t,\\
&\eta^1_t+\eta^0_x=0\quad (\text{тоді } 2\xi^x_{xt}=\xi^t_{tt})
\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}
&a(\eta^1-\xi^t_t)=c(\eta^1-n\xi^x_x),\quad d(\eta^1-n\xi^x_x)=a\eta^0_t,\\
&b(\eta^1-\xi^t_t)=0,\quad b\eta^0_t=0.
\end{aligned}\tag{8}$$

Рівняння (8) — класифікуючі. Необхідно знайти такі значення параметрів a, b, c, d, щоб система (7)–(8) мала нетривіальні розв'язки.

Якщо $b\neq0$, то $\eta^0_t=\eta^1-\xi^t_t=\eta^1-n\xi^x_x=0$, тобто розширення $A^{\max}$ немає. Тому надалі $b=0$, звідки $a\neq1$. Без обмеження загальності можна вважати $a=1$.

Якщо $c\neq0$, то перетворенням еквівалентності функцію F приведемо до вигляду $F=(u_n)^k$, тобто $c=k$, $d=0$. В залежності від значення k маємо або перший, або третій випадок теореми 3.

Коли $c=0$, то $d=0$, і перетворень еквівалентності (3) можна покласти $d=1$. В результаті отримуємо другий випадок теореми 3.

У другому випадку, коли функція F лінійна, її можна привести до вигляду $F=u_n$. Додаткового розширення порівняно із загальною степеневою функцією $F=u_n^k$ в цьому випадку немає.

4. Висновки. Аналіз результатів, отриманих в [1, 2] і цій статті, показує, що в класі рівнянь (1) міститься, крім наведених в теоремі 3 для класу (2), ціла низка рівнянь з широкою симетрією. Зокрема, в [1, 2] описано всі рівняння вигляду (1), що інваріантні відносно групи симетрії рівняння Бюргерса (узагальненої групи Галілея), алгебра Лі якої $AG_2(1,1)=\langle P_0,P_1,G,D,\Pi\rangle$. Питання ж про те, чи існують (і які) випадки більшого розширення групи симетрії, залишається відкритим. Не розглянуто поки і задачі повної групової класифікації в ширших, ніж (2), класах рівнянь вигляду (1), зокрема, коли $F = F(u_{n-1}, u_n)$ (навіть при $n = 2$, тобто $F = F(u_1, u_2)$). Цікаво також було б продовжити розпочате в [1] дослідження рівнянь, що містять квадрат оператора "матеріальної похідної". На нашу думку, перераховані проблеми можуть бути розв'язані з використанням підходу до групової класифікації, запропонованого в [3].

Автори висловлюють щиру подяку Р.О. Поповичу за плідні обговорення результатів, що містяться в статті.

[1] Фущич В.І., Бойко В.М. Галілей-інваріантні рівняння типу Бюргерса та Кортевега-де Фріза високого порядку // Укр. матем. журн. — 1996. — **48**, № 12. — С. 1589–1601.

[2] Boyko V.M. On new generalizatios of the Burgers and Korteweg-de Vries equations // Proc. of the Second International Conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Kyiv, July 7–13, 1997). — Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. — **1**. — P. 122–129.

[3] Нікітін А.Г., Попович Р.О. Групова класифікація нелінійних рівнянь Шрьодінгера // Укр. матем. журн. — 2000. — **52**, Буде опубліковано.

[4] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[5] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с.