Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 43–47

УДК 517.945:519.46

Лоренц-інваріантні рівняння неперервності для електромагнітного поля

***В.М. БОЙКО** †, **І.М. ЦИФРА** ‡*

† *Інститут математики НАН України, Київ*
E-mail: slava@apmat.freenet.kiev.ua

‡ *Інститут геофізики ім. Суботіна НАН України, Київ*
E-mail: tsyfra@apmat.freenet.kiev.ua

Доведена необхідна і достатня умова лоренц-інваріантності рівняння неперервності для електромагнітного поля, в якому густина енергії та вектор Пойтінга визначаються як функції векторних полів $\vec{E}$, $\vec{H}$.

The necessary and sufficient condition for the Lorentz invariance of the continuity equation for the electromagnetic field, where energy density and Poyting vectors depend on the vector fields $\vec{E}$, $\vec{H}$ has been proved.

Відомо [1, 2], що зображення алгебри Лоренца з базисними елементами

$$
\begin{aligned}
&J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a} + E^a\partial_{E^b} - E^b\partial_{E^a} + H^a\partial_{H^b} - H^b\partial_{H^a},\\
&J_{0a} = x_a\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_a} + \varepsilon_{abc}\left(E^b\partial_{H^c} - H^b\partial_{E^c}\right),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де ε_{abc} – повністю антисиметричний тензор третього порядку, $x_0 = t$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, реалізується на множині розв'язків рівнянь Максвелла

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\vec{H}, \qquad \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\vec{E},\\
&\mathrm{div}\vec{E} = 0, \qquad \mathrm{div}\vec{H} = 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Тут і надалі, індекси, позначені латинськими літерами, змінюються від 1 до 3, грецькими – від 0 до 3. За індексами, що повторюються йде підсумовування.

В роботі [3] нами отримані нові нелінійні зображення алгебри Лоренца для векторних полів $\vec{E}$, $\vec{H}$.

Об'єктом дослідження даної роботи є рівняння неперервності

$$\rho_0 + \mathrm{div}\rho\vec{v} = 0, \tag{3}$$

де $\rho_0 = \dfrac{\partial\rho}{\partial x_0}$; $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$; ρ та ρv^k є функціями від $\vec{E}$, $\vec{H}$.

Згідно Пойтингу, густина енергії та вектор Пойтінга для електромагнітного поля визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} &\rho = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right), \\ &\rho v^a = \varepsilon_{abc}E^b H^c. \end{aligned} \tag{4}$$

В роботі [4] показано, що рівняння неперервності (3), (4), що виражає закон збереження енергії для електромагнітного поля, не є інваріантним відносно алгебри Лоренца (1) в класичному розумінні інваріантності диференціального рівняння. Воно є лише умовно інваріантним відносно алгебри Лоренца (1), причому як додаткова умова виступає система рівнянь Максвелла (2).

Постає питання, як можна визначити густину енергії та вектор Пойтінга, щоб рівняння (3) було лоренц-інваріантним в класичному розумінні Лі.

Нехай в рівнянні (3) ρ, $\rho\vec{v}$ – деякі невідомі функції від $\vec{E}$ та $\vec{H}$, тобто вважаємо

$$\rho = F^0\left(\vec{E}, \vec{H}\right), \qquad \rho v^a = F^a\left(\vec{E}, \vec{H}\right), \quad a = \overline{1,3}, \tag{5}$$

де F^0, F^a – гладкі функції, які одночасно не є тотожними нулями.

Шукаємо оператори лоренцових поворотів J_{0a} у вигляді

$$J_{0a} = x_a\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_a} + \eta^{ak}\partial_{E^k} + \beta^{ak}\partial_{H^k}, \tag{6}$$

де η^{ak}, β^{ak} – невідомі функції від $\vec{E}$, $\vec{H}$, які будемо визначати з умов інваріантності рівняння (3), (5) відносно операторів (6).

Оскільки в (3) ρ, $\rho\vec{v}$ можна розглядати як чотиривектор, то побудова операторів симетрії J_{0a} (6) для рівняння (3), (5) еквівалентна знаходженню операторів $\overline{J_{oa}}$ виду

$$\overline{J_{0a}} = x_a\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_a} + A^a\partial_{A^0} + A^0\partial_{A^a} + \eta^{ak}\partial_{E^k} + \beta^{ak}\partial_{H^k} \tag{7}$$

для системи

$$\frac{\partial A^0}{\partial x_0}+\frac{\partial A^a}{\partial x_a}=0, \tag{8}$$

$$A^\mu = F^\mu\left(\vec{E},\vec{H}\right), \qquad \mu=\overline{0,3}. \tag{9}$$

Очевидно, що рівняння (8) інваріантне відносно операторів $\overline{J_{0a}}$, тому дослідження інваріантності системи (8), (9) відносно операторів (7) зводиться до дослідження інваріантності алгебраїчної системи (9).

Для того, щоб система (9) була інваріантною відносно перетворень, що генеруються операторами $\overline{J_{0a}}$, необхідно і достатньо, щоб виконувались співвідношення

$$\overline{J_{0a}}\left(A^\mu - F^\mu\left(\vec{E},\vec{H}\right)\right)\Bigg|_{A^\mu = F^\mu\left(\vec{E},\vec{H}\right)} \equiv 0. \tag{10}$$

З (10) отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} &F^a=\eta^{ak}F^0_{E^k}+\beta^{ak}F^0_{H^k},\\ &\delta_{ab}F^0=\eta^{ak}F^b_{E^k}+\beta^{ak}F^b_{H^k}, \end{aligned} \tag{11}$$

де δ_{ab} – символ Кронекера, $F^0_{E^k}=\dfrac{\partial F^0}{\partial E^k}, \ldots$

Таким чином, щоб знайти η^{ak}, β^{ak}, нам необхідно розв'язати лінійну алгебраїчну систему рівнянь (11). Очевидно, що (11) можна розглядати як три незачеплені алгебраїчні системи розмірності 4×6 відносно η^{ak}, β^{ak}. Запишемо (11) в матричному вигляді

$$B\begin{pmatrix}\eta^a\\ \beta^a\end{pmatrix}=b^a, \qquad a=\overline{1,3}, \tag{12}$$

де $B=\left(F^\mu_{E^k},\ F^\mu_{H^k}\right)$ – матриця Якобі функцій F^μ розмірності 4×6,

$$\eta^a=\begin{pmatrix}\eta^{a1}\\ \eta^{a2}\\ \eta^{a3}\end{pmatrix}, \qquad \beta^a=\begin{pmatrix}\beta^{a1}\\ \beta^{a2}\\ \beta^{a3}\end{pmatrix},$$

$$b^1=\begin{pmatrix}F^1\\ F^0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \qquad b^2=\begin{pmatrix}F^2\\ 0\\ F^0\\ 0\end{pmatrix}, \qquad b^3=\begin{pmatrix}F^3\\ 0\\ 0\\ F^0\end{pmatrix}.$$

Отже, для знаходження операторів Лоренца (6) нам потрібно знайти розв'язки (η^a, β^a) алгебраїчних систем (12). Системи (12) сумісні лише тоді, коли виконується умова

$$r(B) = r(B|b^a), \qquad a = \overline{1,3}. \tag{13}$$

Умова (13) – умова рівності рангів однорідної та розширених систем.

Зауважимо, що ранг кожної з систем (12) не перевищує 4 (4 рівняння, 6 невідомих), причому $r(B) \leq r(B|b^a)$. Отже, якщо розв'язок існує, то він не єдиний.

Для рангів однорідної і розширеної системи можливий один з п'яти варіантів $r = 0; 1; 2; 3; 4$. При $r \leq 3$ легко переконатися, що алгебраїчні системи (12) не мають розв'язків, оскільки F^μ не є одночасно тотожними нулями.

Таким чином, для систем (12) можна знайти розв'язки лише коли

$$r(B) = 4. \tag{14}$$

Умова (14) забезпечує існування розв'язку систем (12), а отже і інваріантність системи (9) відносно операторів $\overline{J_{0a}}$. Але, оскільки виконуються комутаційні співвідношення

$$\left[\overline{J_{0a}}, \overline{J_{0b}}\right] = \overline{J_{ab}},$$

то й оператори $\overline{J_{ab}}$ є операторами симетрії системи (8), (9). А тому, й система (3), (5) є лоренц–інваріантною з операторами Лоренца (6), де (η^{ak}, β^{ak}) визначаються як деякий розв'язок системи (12).

Таким чином, доведена теорема.

Теорема. *Рівняння неперервності (3), (5) буде інваріантним відносно групи Лоренца тоді і тільки тоді, коли ранг матриці Якобі, що утворена функціями F^μ, дорівнює чотирьом.*

Тепер наведемо декілька конкретних прикладів, що ілюструють теорему для заданих F^μ (наводимо в кожному випадку лише один розв'язок з сім'ї розв'язків системи (12)). Явний вигляд операторів J_{ab} не наводимо, оскільки їх легко можна отримати з комутаційних співвідношень $[J_{0a}, J_{0b}] = J_{ab}$.

1. $F^0 = H^1$, $F^a = E^a$. Рівняння (3) матиме вигляд

$$H^1_0 + \mathrm{div}\vec{E} = 0,$$

а оператори лоренцових поворотів у цьому випадку

$$J_{0k} = x_k \partial_{x_0} + x_0 \partial_{x_k} + H^1 \partial_{E^k} + E^k \partial_{H^1}.$$

2. $F^0 = \dfrac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right)$, $F^a = E^a$. Рівняння (3) матиме вигляд

$$E^a E^a_0 + H^a H^a_0 + \mathrm{div}\vec{E} = 0,$$

а оператори лоренцових поворотів у цьому випадку

$$J_{0k} = x_k \partial_{x_0} + x_0 \partial_{x_k} + F^0 \partial_{E^k} + \frac{E^k(1 - F^0)}{H^k} \partial_{H^k},$$

щодо k не має підсумовування.

3. $F^0 = \dfrac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right)$, $F^k = \dfrac{1}{2}\left({E^k}^2 + {H^k}^2\right)$. Оператори лоренцових поворотів у цьому випадку

$$J_{0k} = x_k \partial_{x_0} + x_0 \partial_{x_k} + \frac{F^k + F^0}{2E^k} \partial_{E^k} + \frac{F^k - F^0}{2H^k} \partial_{H^k},$$

щодо k не має підсумовування.

У всіх наведених прикладах зображення алгебри Лоренца не співпадають з алгеброю Лоренца (1), що допускається лінійними рівняннями Максвелла в вакуумі.

В. Бойко висловлює подяку ДФФД України (проект № 1.4/356) за часткову фінансову підтримку цієї роботи.

[1] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. – Киев: Наук. думка, 1983. – 199 с.

[2] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1990. – 400 с.

[3] Fushchych W., Tsyfra I., Boyko V. Nonlinear representations for Poincaré and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic fields // J. Nonlin. Math. Phys. – 1994. – **1**, № 2. – P. 210–221.

[4] Цифра І., Бойко В. Умовна симетрія рівняння неперервності для електромагнітного поля // Доп. НАН України. – 1995. – № 5. – С. 35–36.